СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ. ТЕНЗОР ВТОРОГО РАНГА. ТЕНЗОР ПОВОРОТА.

Зубко Иван Юрьевич

доцент кафедры «Математическое моделирование систем и процессов»

выпускник Лицея №1 1993 года

Свойства диадного произведения

- При скалярном умножении диады на вектор **слева** на первом месте в диаде появляется скаляр — результат скалярного произведения:

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathrm{k}_1\mathbf{b}$$

Свойства диадного произведения

- При скалярном умножении диады на вектор **слева** на первом месте в диаде появляется скаляр — результат скалярного произведения:

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathrm{k}_1\mathbf{b}$$

- При скалярном умножении диады на вектор **c справа** на первом месте в диаде остается вектор **a**, а на втором месте появляется скаляр —

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=\mathbf{a}\mathrm{k}_2=\mathrm{k}_2\mathbf{a}$$

Свойства диадного произведения

- Умножение диады на число и сложение диад:

$$\alpha(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\otimes\mathbf{b} = \mathbf{a}\otimes(\alpha\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} + \alpha\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

Свойства диадного произведения

- Сложение диад с совпадающими векторами:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\otimes\mathbf{c}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a}\otimes(\mathbf{c}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\otimes\mathbf{c}+\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{c}\otimes\mathbf{d} \text{ — ?}$$

Свойства диадного произведения

- Результат этой операции является более сложным объектом, чем диада — тензором второго ранга
- Его уже нельзя представить в виде диадного произведения каких-либо двух векторов

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \text{ — ?}$$

Свойства тензоров

- В наиболее общем виде он представим как неупорядоченная сумма (слагаемые могут быть записаны в любом порядке) упорядоченных пар векторов (диад):

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}^{(1)} \otimes \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{b}^{(2)} + \mathbf{a}^{(3)} \otimes \mathbf{b}^{(3)} + \ldots$$

Свойства тензоров

- Для тензоров второго ранга выполняются аналогичные аксиомы:

$$\sim \mathbf{T} = \alpha \mathbf{a}^{(1)} \otimes \mathbf{b}^{(1)} + \alpha \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{b}^{(2)} + \alpha \mathbf{a}^{(3)} \otimes \mathbf{b}^{(3)} + \ldots$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{T} = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{T}$$

- Сумма любых тензоров второго ранга является тензором второго ранга (в отличие от диад)

Свойства тензоров

- Для скалярного произведения тензоров справедливо:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Свойства тензоров

- Для скалярного произведения тензоров справедливо:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

- Для тензоров второго ранга вводится и такая операция как транспонирование. Для диад она приводит к смене мест векторов диады

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^{\mathrm{T}}=\mathbf{b}\otimes\mathbf{a},\ \left((\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

Свойства тензоров

- Аналогично:

$$\left(\mathbf{a}^{(1)}\otimes\mathbf{b}^{(1)}+\mathbf{a}^{(2)}\otimes\mathbf{b}^{(2)}+\ldots\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{b}^{(1)}\otimes\mathbf{a}^{(1)}+\mathbf{b}^{(2)}\otimes\mathbf{a}^{(2)}+\ldots$$

- При транспонировании скалярного произведения тензоров второго ранга сами тензоры меняются местами и транспонируются:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

Свойства тензоров

- Тензор **A** можно скалярно умножить на вектор **a** слева или справа, причем:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\neq\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}$$

Свойства тензоров

- Тензор **A** можно скалярно умножить на вектор **a** слева или справа, причем:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\neq\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}$$

- Но для этого умножения выполняется:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{a}$$

Свойства тензоров

- Тензор второго ранга называется **симметричным**, если для него выполняется:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

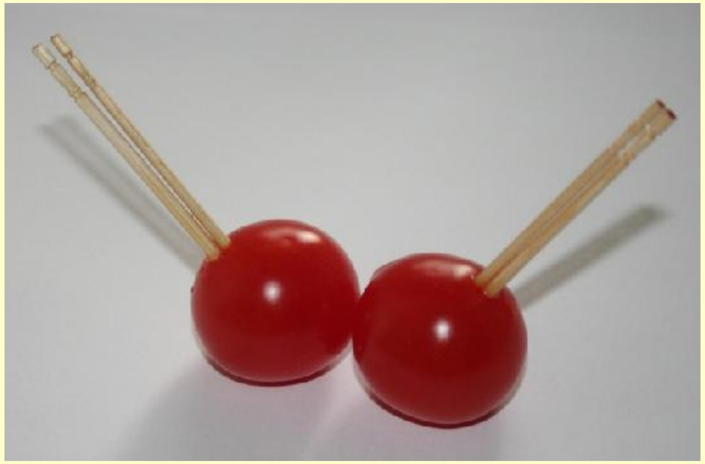
- Примерами симметричных тензоров второго ранга являются тензоры:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

Свойства тензоров

- Примерами симметричных тензоров второго ранга являются тензоры:

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{a},\quad \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{a},\quad \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}$$



Свойства тензоров

- Важным примером симметричного тензора второго ранга является единичный тензор **I**, такой что:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a},\quad \forall\mathbf{a}$$

- Аналогичное правило выполняется и для тензоров:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A},\ \forall\mathbf{A}$$

Свойства тензоров

- Единичный тензор может быть записан по-разному, в частности, полезно знать следующее его представление:

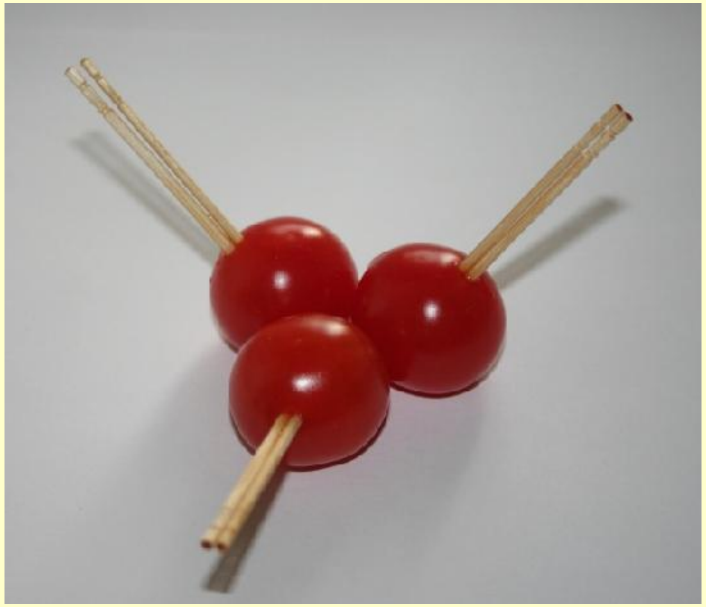
$$\mathbf{I} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$$

где **m**, **n**, **p** — любые (и это очень важно!) единичные попарно ортогональные векторы

Свойства тензоров

- Единичный тензор:

$$\mathbf{I} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$$



Тензоры второго ранга

- В результате скалярного умножения тензора второго ранга на вектор получается новый вектор
- Поэтому каждый тензор второго ранга можно воспринимать как некоторое действие, переводящее один вектор в другой
- В математике такие действия (удовлетворяющие перечисленным для тензоров аксиомам) называют линейными операторами

Тензоры второго ранга

- Как же научиться строить операторы, переводящие один известный вектор в другой?

- Вообще говоря, такие преобразования, как поворот, растяжение или их комбинация, переводящие вектор $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ в вектор $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$ представляются как тензор второго ранга $\mathbf{Q}$ вида

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1}\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \frac{1}{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{p}_2 + \frac{1}{\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_3}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{p}_3$$

Проверьте самостоятельно

Тензор поворота

- Построим тензор, задающий поворот на угол φ относительно оси, направление которой определяется единичным вектором **m**

- Структура этого ортогонального тензора задается теоремой Эйлера, которая говорит, что тензор поворота **Q** произвольного вектора относительно оси **m** имеет вид:

Тензор поворота

- Тензор поворота **Q** произвольного вектора относительно оси **m**:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \right) \cos\varphi + \mathbf{m} \times \left(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \right) \sin\varphi =$$

$$=$$

Тензор поворота

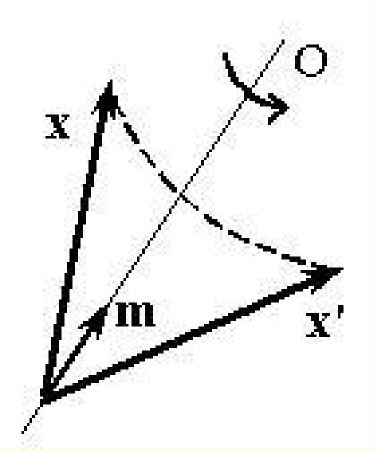
- Тензор поворота **Q** произвольного вектора относительно оси **m**:

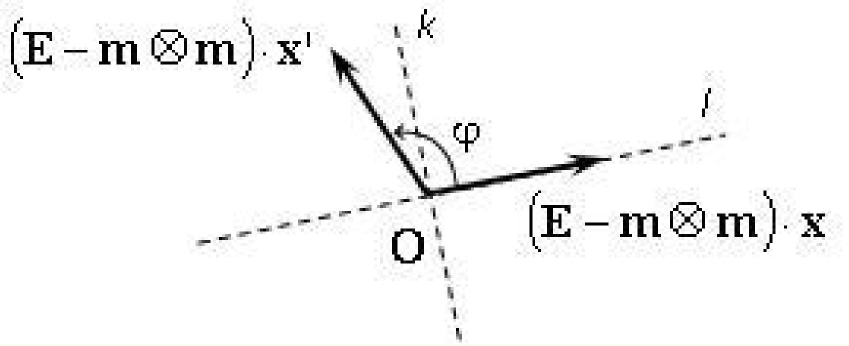
$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi} &= \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\right)\cos\varphi + \mathbf{m}\times\left(\mathbf{I} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\right)\sin\varphi = \\ &= \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\right)\cos\varphi + \mathbf{m}\times\mathbf{I}\sin\varphi = \\ &= \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}(1-\cos\varphi) + \mathbf{I}\cos\varphi + \mathbf{m}\times\mathbf{I}\sin\varphi\end{aligned}$$

Тензор поворота

- Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой теоремы:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\phi} \cdot \mathbf{x}$$





Тензор поворота

- Используя теорему Эйлера, получим правило наложения поворотов. Идея очень проста — повернем вектор **x** вокруг оси **m** на угол φ_1 и получим вектор $\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_1} \cdot \mathbf{x}$, а затем повернем полученный вектор еще и на угол φ_2 относительно той же оси **m**, тогда

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_2} \cdot \left(\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_1} \cdot \mathbf{x} \right) = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_2} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_1} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_2} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_1} = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi_1 + \varphi_2}$$

Тензор поворота

- Отметим еще одну особенность тензора поворота: при повороте «повернутого» вектора в противоположном направлении на тот же угол вокруг той же оси мы получим исходный вектор. Такое действие (или преобразование вектора) называется **обратным** и обозначается как $\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi}\right)^{-1}$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{-\varphi} \equiv (\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{-1}$$

$$\left((\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi}\right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \;\Rightarrow\; (\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi} = \mathbf{I}$$

Тензор поворота

- Легко показать, что

$$(\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{\mathrm{T}} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}\right)\cos\varphi - \mathbf{m} \times \mathbf{I}\sin\varphi = \mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{-\varphi} = (\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{-1}$$

- То есть для тензора поворота справедливо

$$(\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{-1} = (\mathbf{Q}_{\mathbf{m}}^{\varphi})^{\mathrm{T}}$$

- Такие тензоры называют ортогональными

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a} = \{1; 2; 0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a} = \{1; 2; 0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Решение: векторы базиса, в котором заданы компоненты **a** будем обозначать как $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то есть

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a} = \{1; 2; 0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Решение: векторы базиса, в котором заданы компоненты **a** будем обозначать как $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то есть

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}_{Ox_3}^{120^\circ} \cdot \mathbf{a} \quad - \quad ?$$

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a} = \{1; 2; 0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Решение: зная, что $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получим:

$$\mathbf{Q}_{Ox_3}^{120°} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\left(-\frac{1}{2}\right) -$$

$$-\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a} = \{1; 2; 0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Решение: теперь можем найти **b**, учитывая, что

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

Тензор поворота

Упражнение: найти вектор **b**, полученный в результате поворота вектора $\mathbf{a}=\{1;2;0\}$ на угол 120° вокруг Ox_3 против часовой стрелки.

Решение:

$$\mathbf{b}=\mathbf{Q}_{Ox_3}^{120^\circ}\cdot\mathbf{a}=\left(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3-\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\right)\right)\cdot\left(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\otimes(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2\otimes(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1)-\frac{1}{2}\mathbf{e}_2\otimes(\mathbf{e}_2\cdot 2\mathbf{e}_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1\otimes(\mathbf{e}_2\cdot 2\mathbf{e}_2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathbf{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2+\sqrt{3}\mathbf{e}_1=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\mathbf{e}_1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2=\{\frac{2\sqrt{3}-1}{2};-\frac{2+\sqrt{3}}{2};0\}.$$

Основы векторной и тензорной алгебры

Список литературы:

- Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор. 2001. 276 с.