Пермский национальный исследовательский
политехнический университет
Кафедра математического моделирования систем и процессов

Матричные игры

к.ф.-м.н., доц. Павел Сергеевич Волегов

Матричные игры

•Рассмотрим такую игру **G**, в которой участвуют два игрока **A** и **B**, имеющие антагонистические интересы: выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Так как выигрыш игрока **A** равен выигрышу игрока **B** с обратным знаком, можем интересоваться только выигрышем **a** игрока **A**. Естественно, игрок **A** хочет максимизировать **a**, а игрок **B** - минимизировать **a**.

•Для простоты отождествим себя мысленно с одним из игроков (пусть это будет игрок **A**), тогда будем называть игрока **B** - “противник” (разумеется, каких-то реальных преимуществ для **A** из этого не вытекает).

•Пусть у игрока **A** имеется **m** возможных стратегий $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_m}$, а у противника - **n** возможных стратегий $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, ..., $\mathbf{B_n}$ (такая игра называется игрой **m** x **n**).

Матричные игры

Обозначим через $\mathbf{a_{ij}}$ выигрыш игрока **A**, в случае, если он воспользуется стратегией $\mathbf{A_i}$, а игрок B - стратегией $\mathbf{B_j}$. Предполагается, что выигрыш $\mathbf{a_{ij}}$ известен. Тогда мы можем составить прямоугольную таблицу (матрицу), в которой перечислены стратегии игроков и соответствующие выигрыши:

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Говорят, что игра **G** приведена к матричной форме.

Примеры матричных игр

Игра 1. Вариант игры «Морра»

Игра состоит в том, что каждый из двух игроков независимо друг от друга выбирает определенную сторону монеты (“герб” или “решка”), затем одновременно называют свой выбор. Если игроки выбрали одну и ту же сторону монеты, то второй игрок платит первому одну копейку, если разные, то первый платит второму такую же сумму. Легко видеть, что матрица выигрышей (платежная матрица) этой игры имеет вид

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1		
A_2		

Стратегии:
A_1, **B_1** - игроки **A** и **B** выбирают “герб”,
A_2, **B_2** - игроки **A** и **B** выбирают “решку”.

Примеры матричных игр

Игра 1. Вариант игры «Морра»

Игра состоит в том, что каждый из двух игроков независимо друг от друга выбирает определенную сторону монеты (“герб” или “решка”), затем одновременно называют свой выбор. Если игроки выбрали одну и ту же сторону монеты, то второй игрок платит первому одну копейку, если разные, то первый платит второму такую же сумму. Легко видеть, что матрица выигрышей (платежная матрица) этой игры имеет вид

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Нетривиальность сформулированной задачи, как и любой матричной игры, состоит в том, что каждый из игроков делает свой выбор независимо друг от друга.

Примеры матричных игр

Игра 2. Борьба за рынки

Фирмы А и В производят одинаковый товар и в настоящее время каждая «контролирует» 50% рынка.
Улучшив качество товара, обе фирмы собираются развернуть рекламные кампании.
При этом приобретение новых покупателей одной фирмой сопровождается потерей этих покупателей другой фирмой.
Исследование показало, что
•60% потенциальных покупателей получают информацию через телевидение,
•30% - через газеты,
•10% - через радиовещание.
Задача каждой фирмы – выбрать стратегию рекламной кампании.

Примеры матричных игр

Игра 2. Борьба за рынки

В данной игре у каждого из игроков по три стратегии:
A_1, B_1 – рекламировать товар через телевидение;
A_2, B_2 – через газеты;
A_3, B_3 – через радиовещание.
Поскольку это игра с нулевой суммой, то матрицу выигрышей фирмы А можно представить в следующем виде:

	B_1	B_2	B_3
A_1			
A_2			
A_3			

где a_{ij} – количество покупателей товара фирмы А в процентах, на которое оно увеличивается, если фирма А применяет стратегию A_i , а фирма В – стратегию B_j.

Примеры матричных игр

Игра 2. Борьба за рынки

В данной игре у каждого из игроков по три стратегии:
A_1, B_1 – рекламировать товар через телевидение;
A_2, B_2 – через газеты;
A_3, B_3 – через радиовещание.
Поскольку это игра с нулевой суммой, то матрицу выигрышей фирмы А можно представить в следующем виде:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0	30	50
A_2	-30	0	20
A_3	-50	-20	0

где a_{ij} – количество покупателей товара фирмы А в процентах, на которое оно увеличивается, если фирма А применяет стратегию A_i , а фирма В – стратегию B_j.

Принцип максимина. Седловая точка игры

- **Оптимальной стратегией** игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно, то оптимальная стратегия должна обеспечивать максимальный средний выигрыш.
- При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что **противник является, по меньшей мере, так же разумен, как и мы сами,** и делает все, чтобы добиться такой же цели.
- Расчет на разумного противника - лишь одна из возможных позиций в конфликте, но в теории игр именно она кладется в основу.

Принцип максимина. Седловая точка игры

•Для выбора оптимальной стратегии используют **принцип максимина**: **выбирай ту стратегию, чтобы при наихудшем для нас поведении противника получить максимальный выигрыш.**

•Другими словами, принцип максимина предполагает выбор той стратегии**, при которой наш минимальный выигрыш для различных стратегий максимален**.

• Отсюда и название «принцип максимина».

•Как видно, принцип максимина - это принцип крайне осторожного игрока, но именно он является основным принципом теории матричных игр.

Принцип максимина. Седловая точка игры

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_j	12	10	7	9	10	

максимин $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$

минимакс $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

Принцип максимина. Седловая точка игры

Какой стратегией воспользоваться игроку **A**?

Есть соблазнительный выигрыш 12, при применении стратегии $\mathbf{A_3}$. Но при этом противник может выбрать стратегию $\mathbf{B_3}$, и игрок А получит выигрыш, равный всего трем.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_j	12	10	7	9	10	

максимин $\max_i \min_j a_{ij}$

минимакс $\min_j \max_i a_{ij}$

<u>Нижняя цена игры</u> (или «максимин» - максимальный из минимальных выигрышей). Будем обозначать его ~. В нашем примере α =5.

<u>Верхняя цена игры</u> (или “минимакс”) - минимальный из максимальных проигрышей. Будем обозначать ее . В нашем примере β **= 7**

Принцип максимина. Седловая точка игры

Пример. Найти решение игры G (3x3), платежная матрица которой имеет следующий вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	
A_2	3	2	-1	
A_3	6	3	0	
β_j				

Принцип максимина. Седловая точка игры

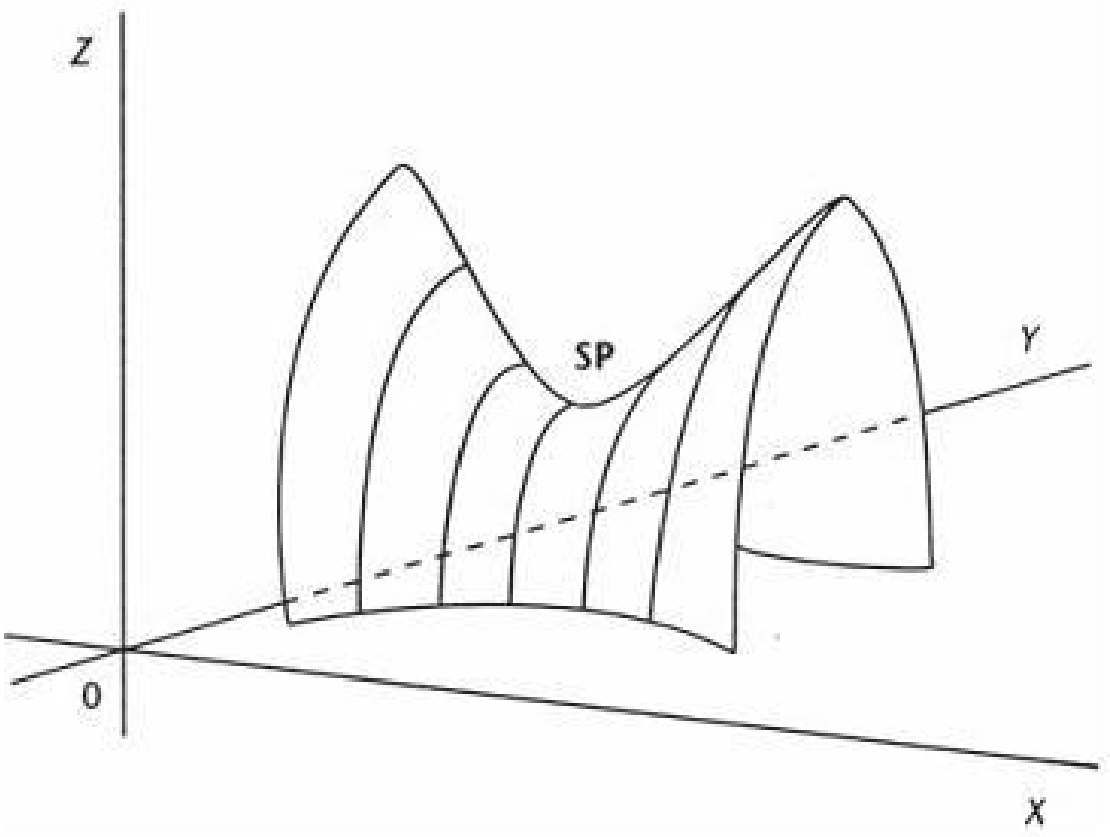
Пример. Найти решение игры G (3x3), платежная матрица которой имеет следующий вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	3	2	-1	-1
A_3	6	3	0	0
β_j	6	3	0	

Здесь $\alpha=\beta=0$, поэтому говорят, что платежная матрица и матричная игра имеют **седловую точку.** Оптимальными стратегиями для игрока А является стратегия A_3, а для игрока В - B_3.

Легко заметить, что отклонение игрока А от оптимальной стратегии приводит к уменьшению его выигрыша, а одностороннее отклонение игрока В - к увеличению его проигрыша.

Седловая точка игры. Геометрическая интерпретация



Принцип максимина. Седловая точка игры

Пример. Найти решение игры G (3x4), платежная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	
A_2	8	4	3	4	
A_3	7	6	8	6	
β_j					

Принцип максимина. Седловая точка игры

Пример. Найти решение игры G (3x4), платежная матрица которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_j	8	6	9	6	

Таким образом, игра имеет четыре седловые точки с соответствующими парами оптимальных стратегий: A_1B_2; A_1B_4; A_3B_2 и A_3B_4. Цена игры равна 6.

Принцип максимина. Седловая точка игры

Пример. Составьте платежную матрицу игры Морра, если в ней участвуют два игрока, а максимально возможное количество «выбрасываемых» пальцев равно *i* (*i*=1,2,3,4,5,6,7). Выигрыш равен сумме пальцев выброшенных игроками. При четной сумме выигрывает первый игрок, при нечетной – второй. Есть ли у такой игры седловая точка?

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	α_i
A_1							
A_2							
A_3							
A_4							
A_5							
A_6							
A_7							
β_j							

Принцип максимина. Седловая точка игры

Как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки?

Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку А выигрыш не менее ~, игроку - проигрыш не больше β.

Учитывая что $\alpha<\beta$, естественно для игрока А желание увеличить выигрыш, а для игрока В - уменьшить проигрыш.

Поиск такого решения производит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.