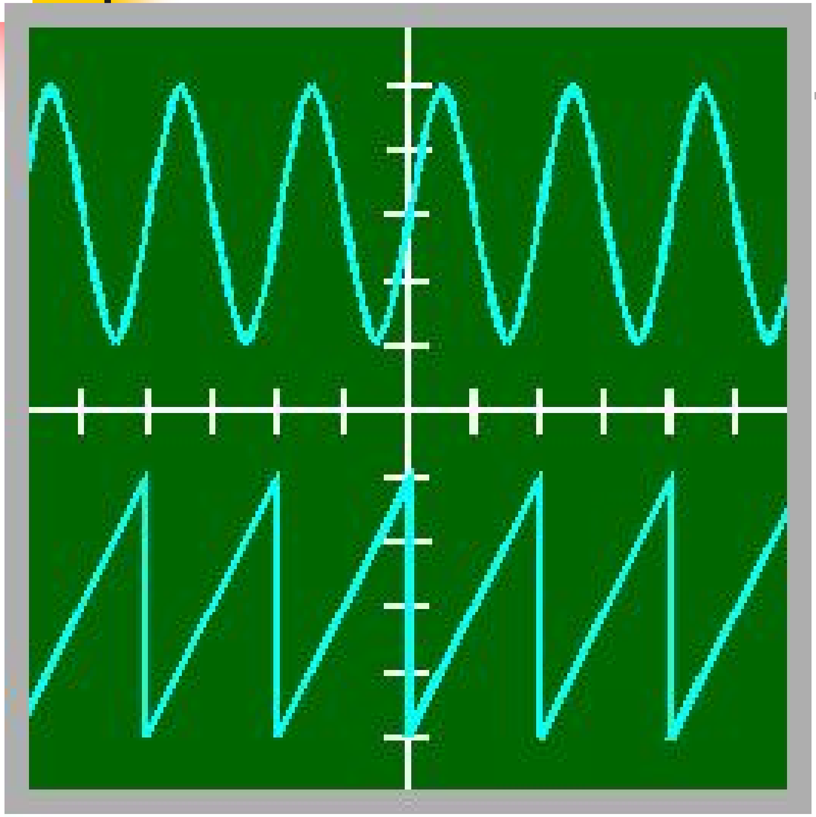
ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

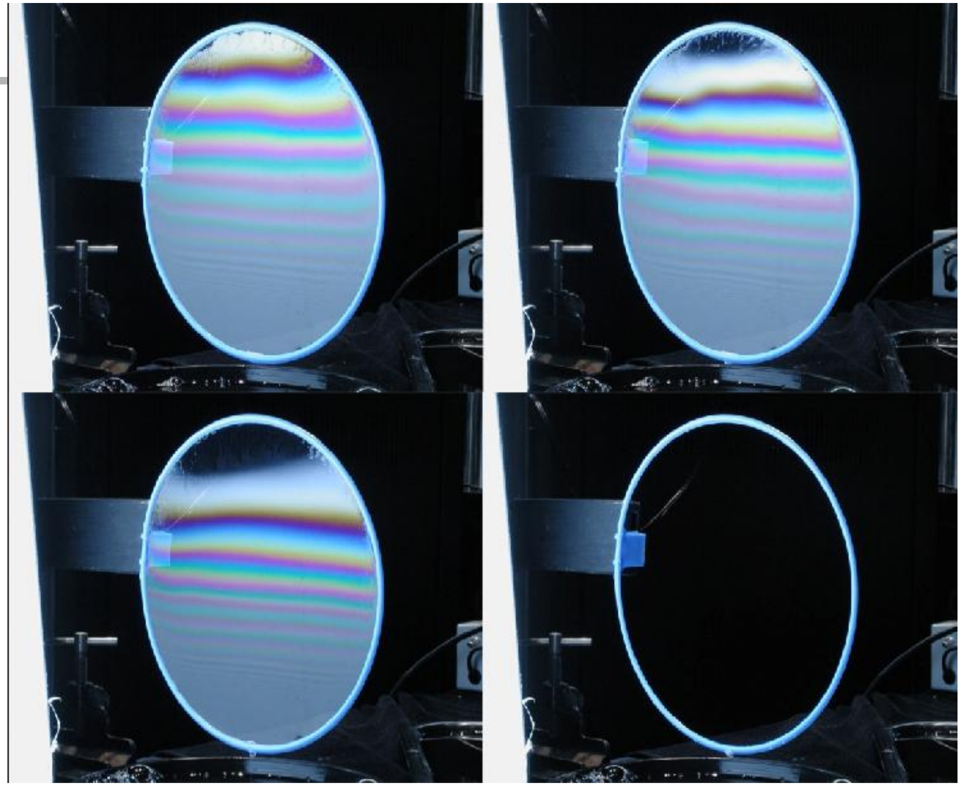
Колебательное движение

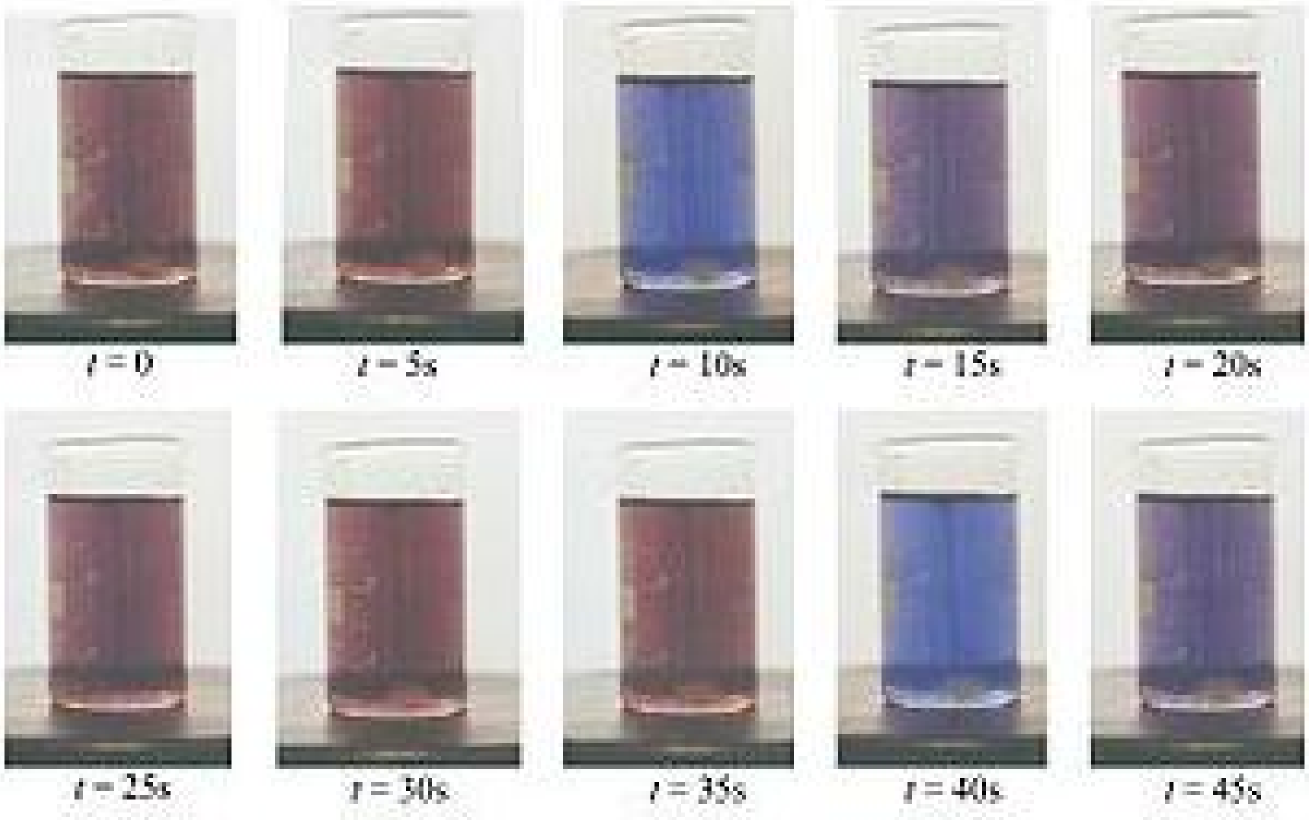
Татьяна Анатольевна Герцен,

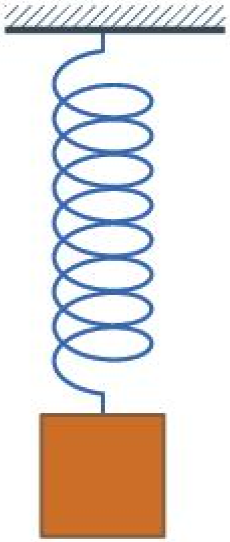
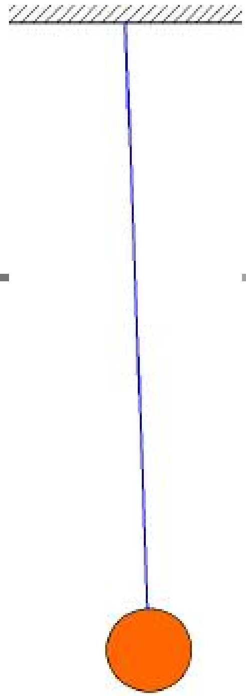
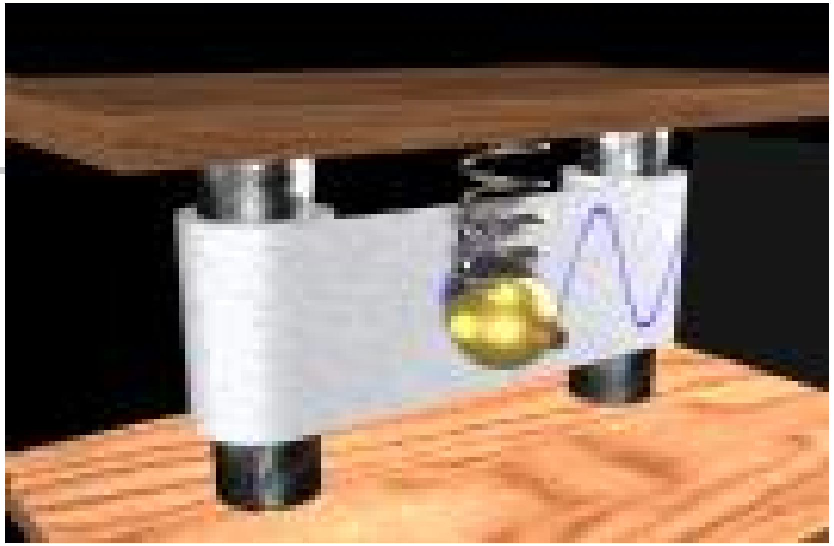
к.х.н., доцент кафедры «Прикладная физика» ПНИПУ

Колебательное движение

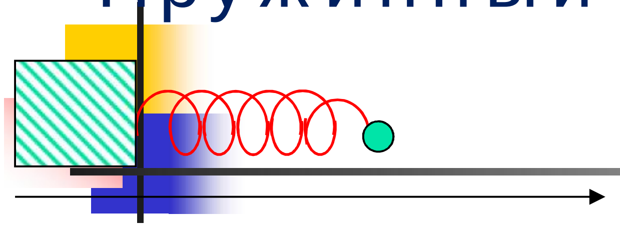


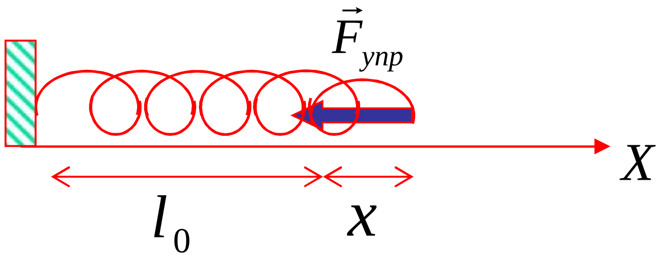



t = 0
t = 5s
t = 10s
t = 15s
t = 20s
t = 25s
t = 30s
t = 35s
t = 40s
t = 45s

Свободные гармонические колебания. Пружинный маятник.





$$F_x = -kx$$

$$X: \quad ma_x = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \mu_0^2 x = 0$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \mu_0^2 x = 0}$$

Решение дифференциального уравнения гармонических колебаний.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

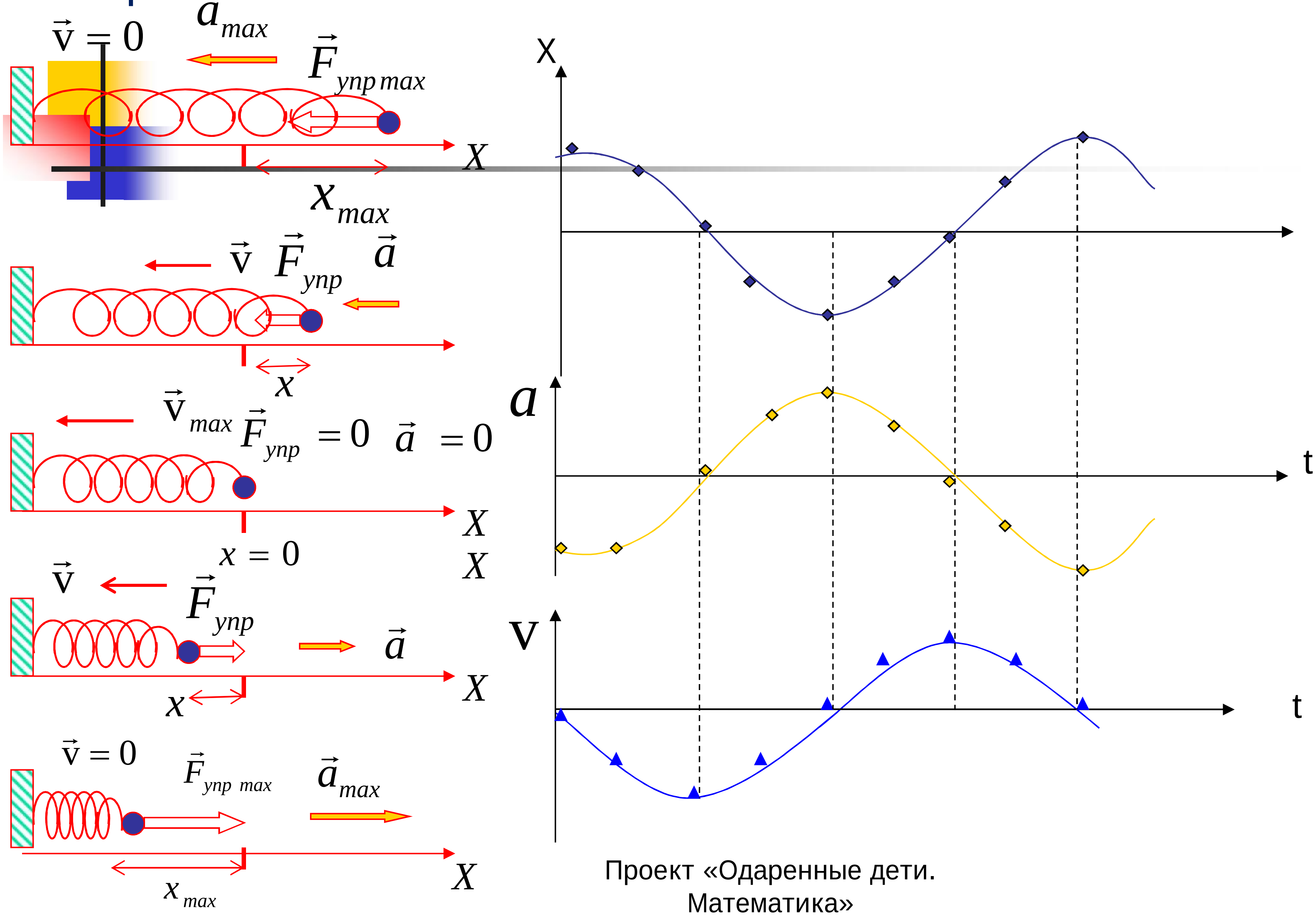
$$x(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ A\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) \equiv 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Смещение, скорость и ускорение при гармонических колебаниях.



Проект «Одаренные дети. Математика»

Превращения энергии при гармонических колебаниях

При гармонических колебаниях полная механическая энергия системы сохраняется.

Пружинный маятник

$$x = A\cos(\mu_0 t + \text{¨})$$

$$E = E_{кин} + U = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{k x^2}{2}$$

$$v_x = \dot{x} = -A\mu_0 \sin(\mu_0 t + \text{¨})$$

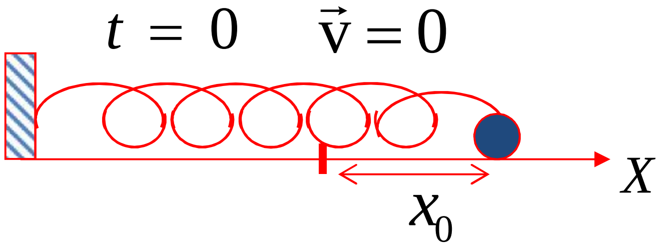
$$E = \frac{mA^2\mu_0^2}{2}\sin^2(\mu_0 t + \text{¨}) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\mu_0 t + \text{¨})$$

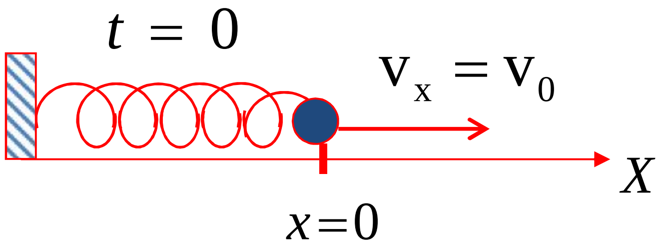
$$\mu_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{mA^2 k}{2m}\sin^2(\mu_0 t + \text{¨}) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\mu_0 t + \text{¨})$$

$$\boxed{E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m v_{max}^2}{2}}$$

Определение амплитуды и фазы из начальных условий.





$$x = A\cos(\mu_0 t + \ddot{\ })$$

$$v_x = \dot{x} = -A\mu_0 \sin(\mu_0 t + \ddot{\ })$$

$$\Rightarrow \quad t = 0 \quad \begin{cases} x = A\cos\ddot{\ } \\ v_x = -A\mu_0 \sin\ddot{\ } \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos\ddot{\ } = x_0 \\ -A\mu_0 \sin\ddot{\ } = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ \ddot{\ } = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_0 \cos \mu_0 t}$$

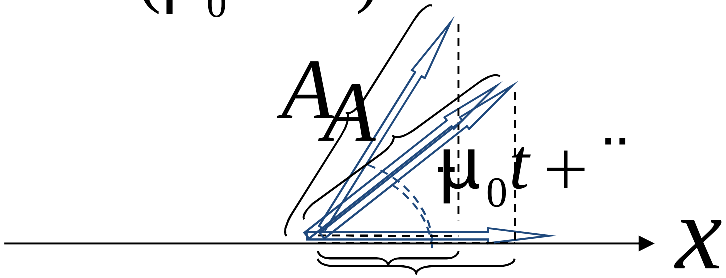
$$\begin{cases} A\cos\ddot{\ } = 0 \\ -A\mu_0 \sin\ddot{\ } = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{v_0}{\mu_0} \\ \ddot{\ } = -\frac{\text{®}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{v_0}{\mu_0}\cos(\mu_0 t - \frac{\text{®}}{2})$$

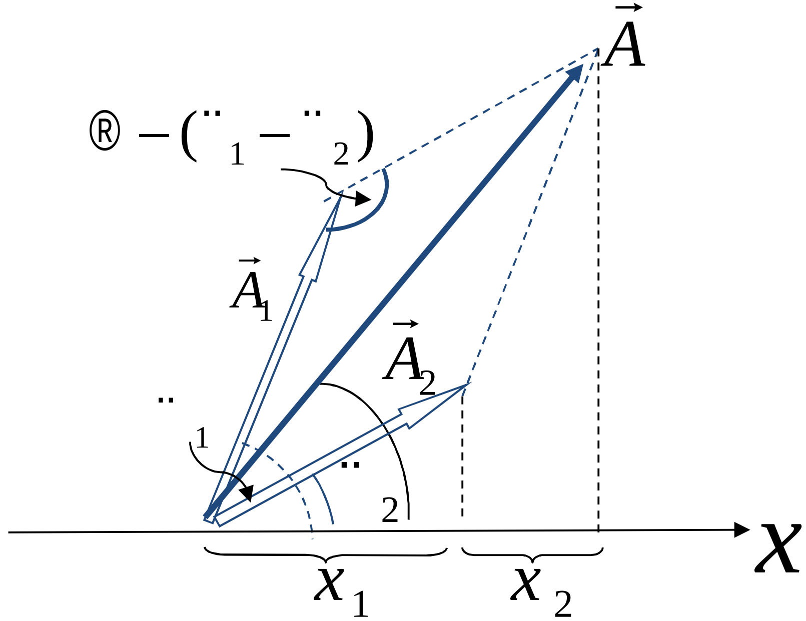
$$x = \frac{v_0}{\mu_0}\sin \mu_0 t$$

Векторное представление колебаний (векторная диаграмма). Сложение колебаний одинакового направления.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

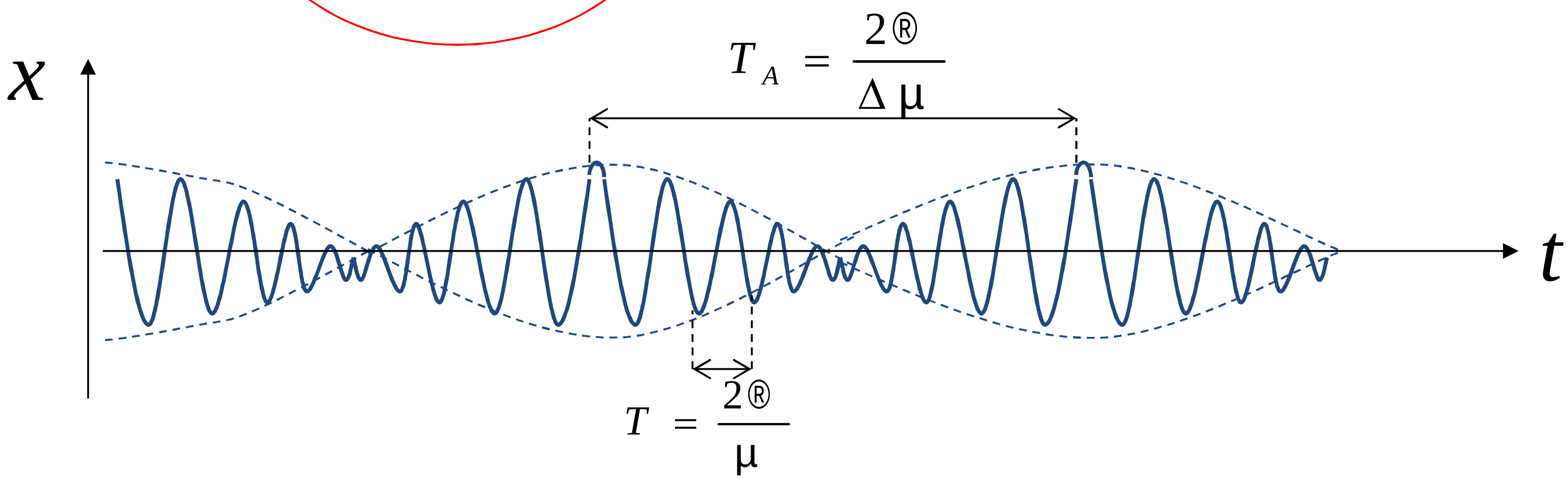
$$tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Биения.

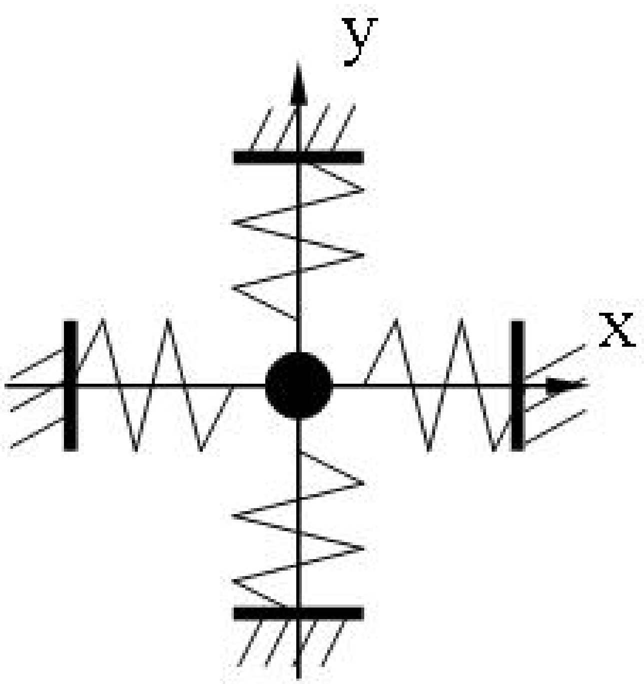
$$x_1 = A\cos\mu t \qquad x_2 = A\cos(\mu+\Delta\mu)t \qquad \Delta\mu << \mu$$

$$x = A\cos\mu t + A\cos(\mu+\Delta\mu)t = 2A\cos\left(\frac{\Delta\mu}{2}t\right)\cos(\frac{2\mu+\cancel{\Delta\mu}}{2}t)$$

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\mu}{2}t\right)\cos(\mu t)$$



Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.



$$x(t) = A\cos(\mu t); \quad y(t) = B\cos(\mu t + \text{¨})$$

$$cos(\mu t) = x(t)/A$$

$$\sin(\mu t) = \pm\sqrt{1 - x^2(t)/A^2}$$

$$\cos(\mu t + \text{¨}) = \cos(\mu t)\cos\text{¨} - \sin(\mu t)\sin\text{¨} =$$

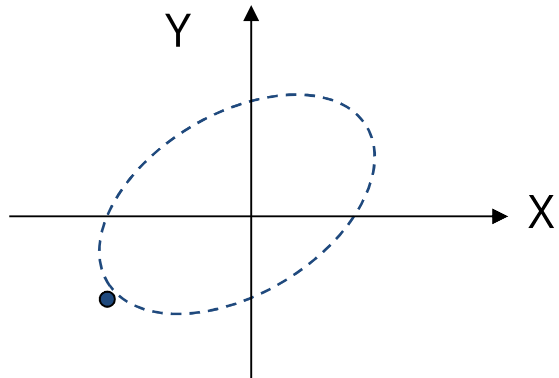
$$= \frac{x(t)}{A}\cos\text{¨} \mp \sin\text{¨}\sqrt{1 - x^2(t)/A^2}$$

$$\frac{y(t)}{B} = \frac{x(t)}{A}\cos\text{¨} \mp \sin\text{¨}\sqrt{1 - x^2(t)/A^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{A \cdot B}\cos\text{¨} = \sin^2\text{¨}}$$

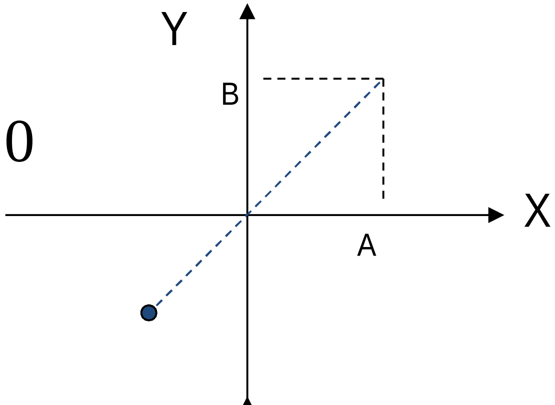
Фигуры Лиссажу.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{A \cdot B}\cos ¨ = \sin^2 ¨$$



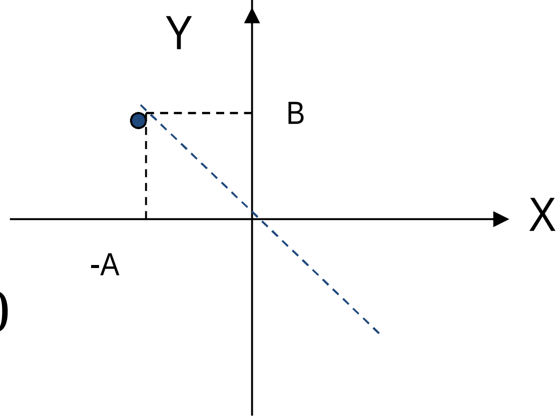
1) $¨ = 0$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$



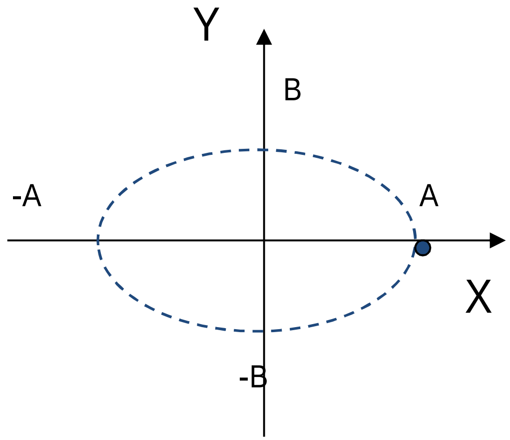
3) $¨ = \pm \frac{®}{2}$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$



2) $¨ = \pm ®$

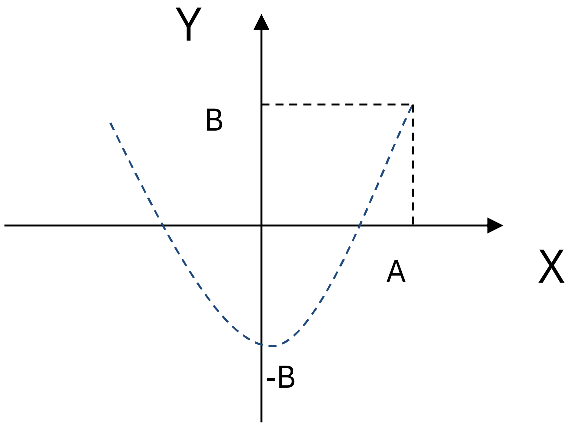
$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$



Фигуры Лиссажу (сложение колебаний разных частот).

$$x(t) = A\cos(\mu t); \quad y(t) = B\cos(2\mu t + \text{¨})$$

1) $\text{¨} = 0$



2) $\text{¨} = \pm \dfrac{\text{®}}{2}$