Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Кафедра математического моделирования систем и процессов

ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

к.ф.-м.н., доц. П.С. Волегов

Пример 1. О баскетболисте

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

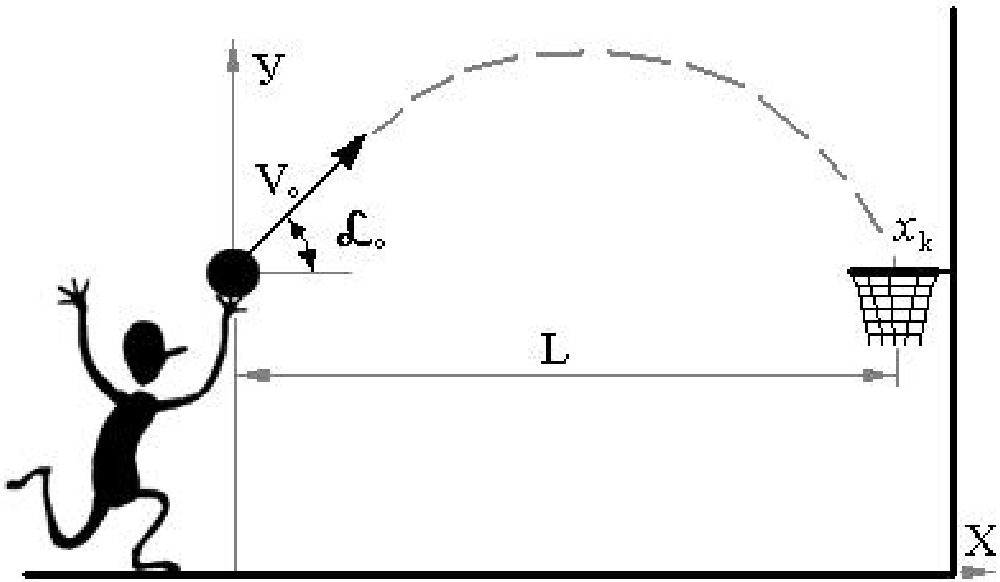
Исходные данные:

- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

Пример 1. О баскетболисте

Гипотезы:

1. объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
2. мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
5. пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча.

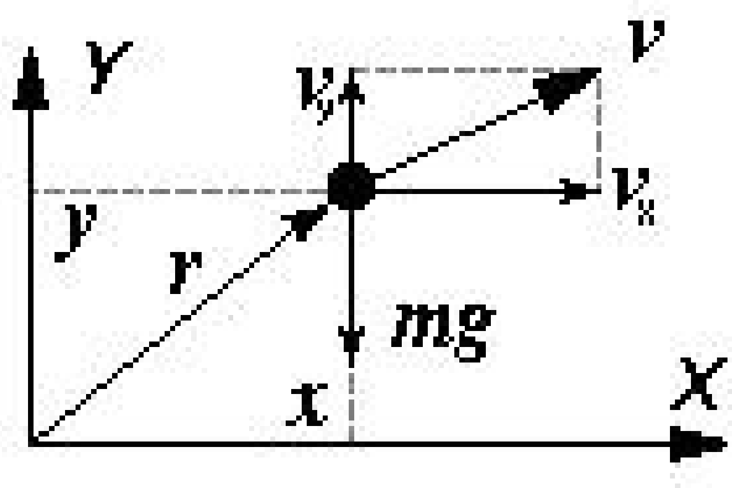


Пример 1. О баскетболисте

Математическая постановка:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{тяж} = m\boldsymbol{g},$$

$$r(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}(\;) = \mathbf{v}_0$$



В проекциях на оси координат:

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg,$$

$$x(0) = x_o, \qquad y(0) = y_o,$$

$$v_x(0) = v_o \cos\sim_o, \qquad v_y(0) = v_o \sin\sim_o$$

Точность броска: $\Delta = x(t_k) - x_k$, где $t_k > 0$, $v_y(t_k) < 0$, $y(t_k) = y_k$.

Пример 1. О баскетболисте

Решение задачи:

$$x(t) = x_o + v_o t\cos\alpha_o, \qquad y(t) = y_o + v_o t\sin\alpha_o - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x(t) = v_o\cos\alpha_o, \qquad v_y(t) = v_o\sin\alpha_o - gt.$$

Поиск точности броска:

$$x_0 = y_0 = y_k = 0, \qquad L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_o, \qquad \Delta = L - x_k.$$

Проверка адекватности:

$x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$м; $v_o = 6{,}44$м/с; $\alpha = 45^0$

$L = 4{,}225$м; $\Delta = 0$м

Пример 2. «Весёлый фермер»

Некий фермер каждый год выращивает на своем поле пшеницу на продажу. Запасов, которые хранились бы больше года, он не делает. Решение о том, сколько пшеницы сеять, принимается с учетом цен предыдущего года. Причем если цены были высокие — в этом году надо сеять пшеницы больше, а если низкие — меньше. Спрос на пшеницу в течение года зависит от ее цены в момент продажи. Когда цена растет, спрос падает.

Необходимо описать поведение цен в ближайшие годы как функцию от первоначальной цены.

Пример 2. «Спрос-предложение»

Обозначения:

В качестве параметров модели используем следующие:

$\boldsymbol{p_n}$ **–** цена за единицу веса пшеницы в *n*-й год ($\boldsymbol{p_n} \geq 0$);

$\boldsymbol{s_n}$ – предложение (объем поставок) пшеницы в *n*-й год (в принятых единицах веса, $\boldsymbol{s_n} \geq 0$);

$\boldsymbol{d_n}$ – спрос на пшеницу в *n*-й год (в единицах веса, $\boldsymbol{d_n} \geq 0$).

Пример 2. «Спрос-предложение»

Гипотезы:

- Объектом исследования является зависимость цены p_n на пшеницу от ее первоначальной цены p_0.
- Предположим, что предложение s_{n+1} будущего года зависит линейно от цены p_n в этом году, причем чем выше p_n , тем больше s_{n+1}:

$$s_{n+1} = a\, p_n - b.$$

- Предположим, что спрос будущего года d_{n+1} зависит линейно от цены p_{n+1} в том же году, причем чем выше цена p_{n+1}, тем меньше спрос d_{n+1}:

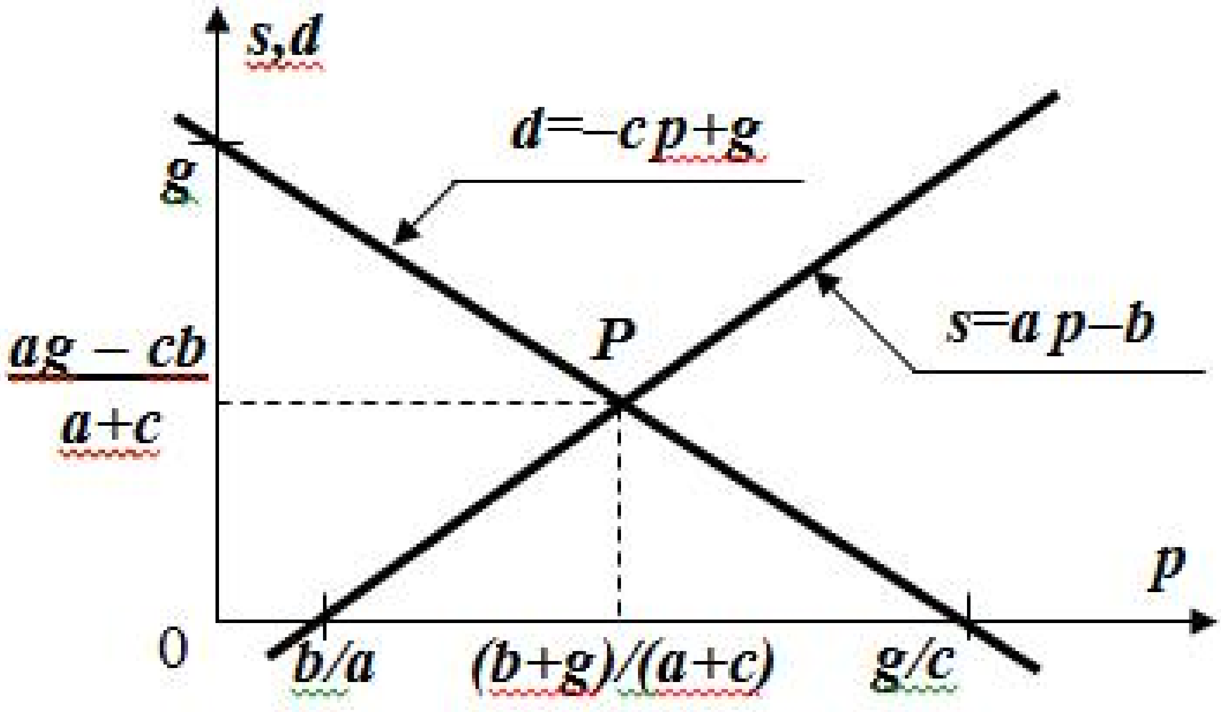
$$d_{n+1} = -c\, p_{n+1} + g,.$$

- Предположим, что рыночная цена p_{n+1} определяется равновесием между спросом d_{n+1} и предложением s_{n+1}.

Требуется описать поведение цен p_1, p_2, p_3, ... в зависимости от значения цены p_0.

Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ математической постановки:



Пример 2. «Спрос-предложение»

Решение:

$$a\ p_n - b = -c\ p_{n+1} + g.$$

Разделим обе части на ***c*** и переобозначим константы:

$$A = a/c > 0, \quad B = (b/c + g/c) > 0,$$

Тогда получаем уравнение:

$$p_{n+1} = -A\ p_n + B$$

Решим вначале *однородное уравнение*:

$$p_{n+1} = -A\ p_n$$

Предположим, что $p_0 = C$. Тогда

$$p_1 = C\,(-A);$$

$$p_2 = C\,(-A)^2;$$

$$p_3 = C\,(-A)^3; \quad \ldots$$

или в общем случае: $p_n = C\,(-A)^n$.

Пример 2. «Спрос-предложение»

Решение:

Найдем теперь любое решение неоднородного уравнения:

Пусть $p_n = D$ для всех n.

Подставим в исходное уравнение, получим

$$D + A D = B \text{ или } D = B/(A+1).$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$p_n = C(-A)^n + B/(A+1).$$

При $n=0$ получим

$$C = p_0 - B/(A+1).$$

Тогда окончательное решение будет иметь вид:

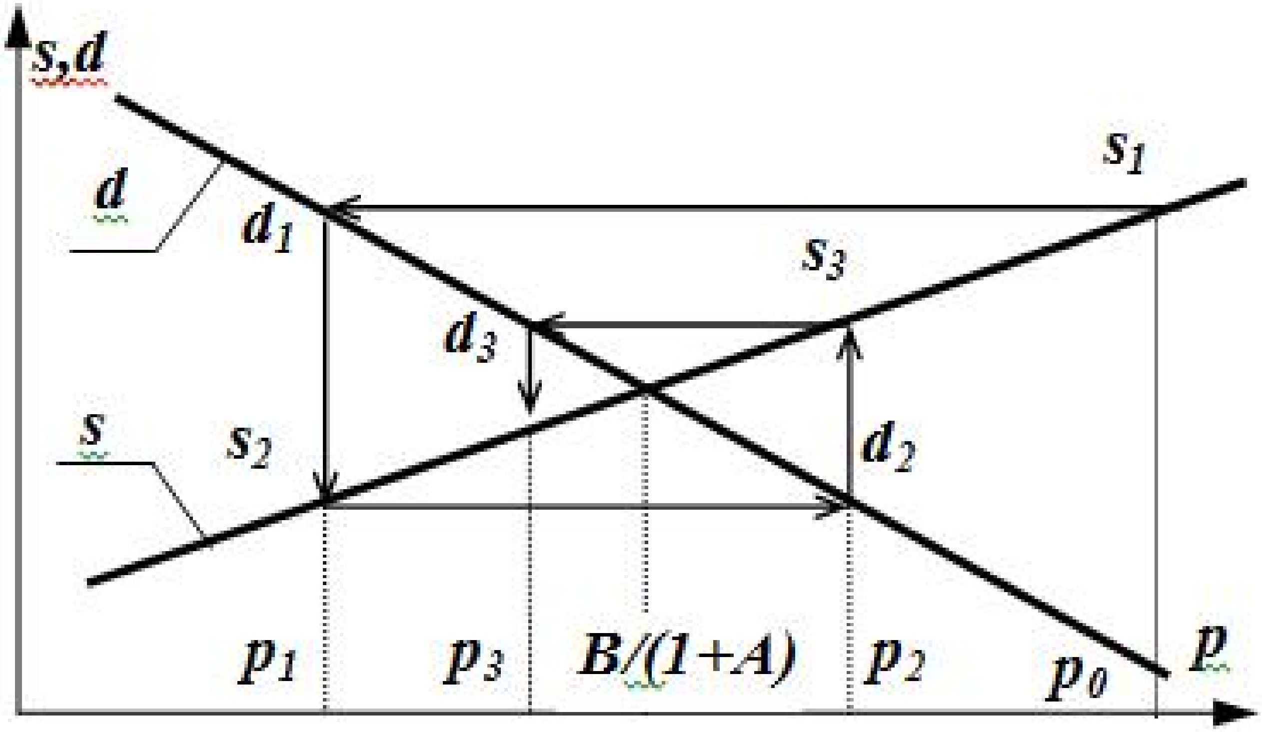
$$p_n = p_0 (-A)^n + [B/(A+1)]\,[1 - (-A)^n].$$

Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

0<A<1

A = a/c>0

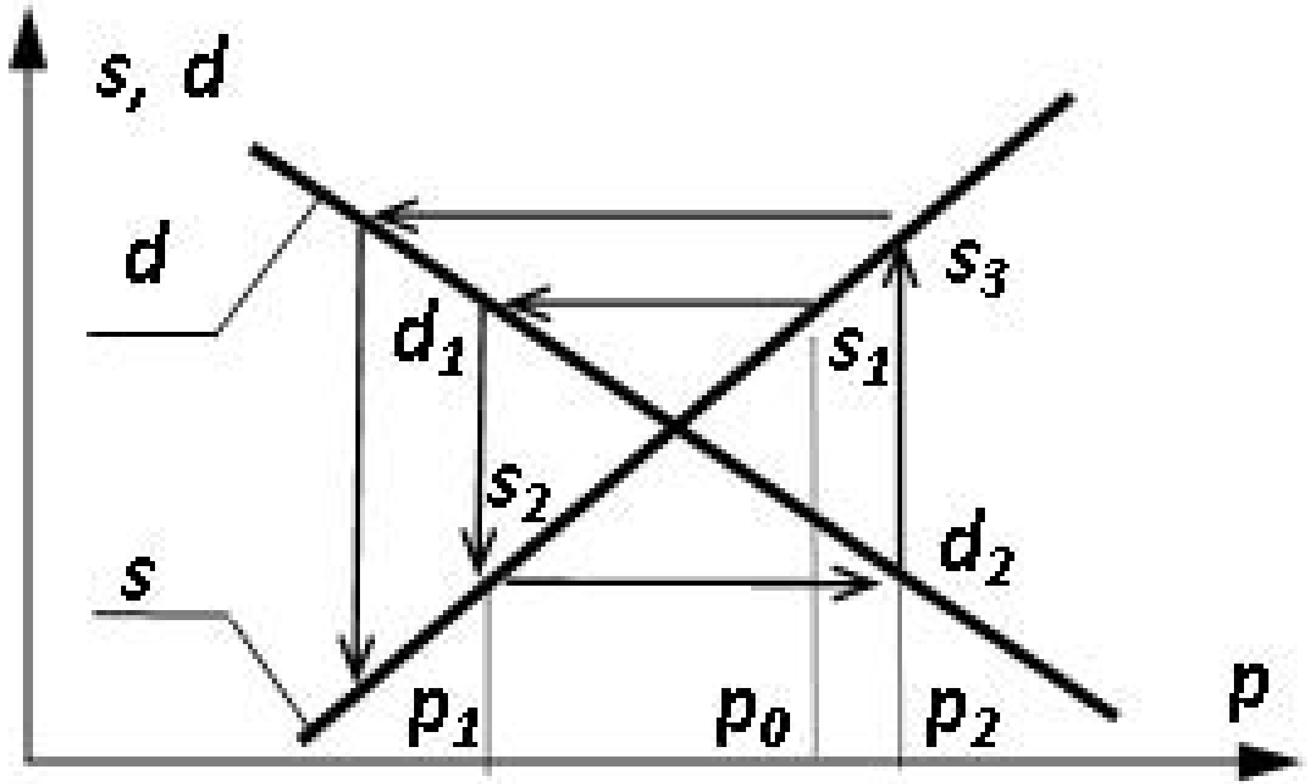


Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

A>1

A = a/c>0

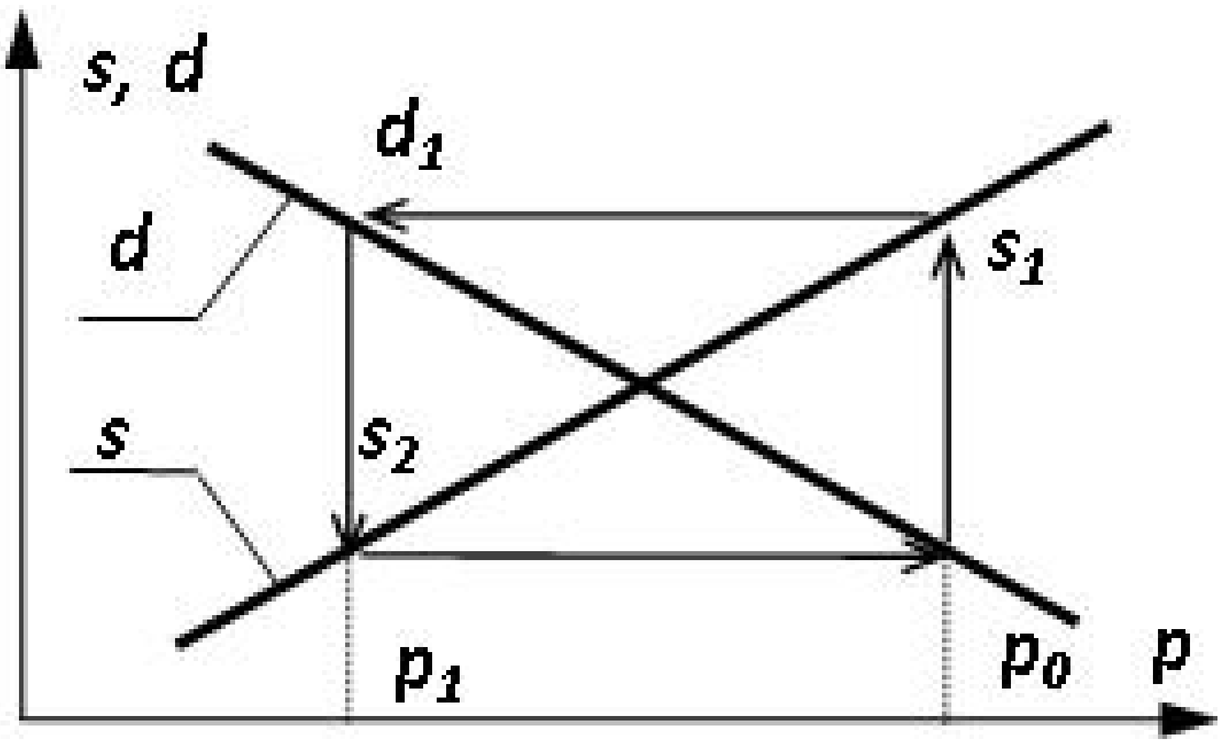


Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

A=1

A = a/c>0

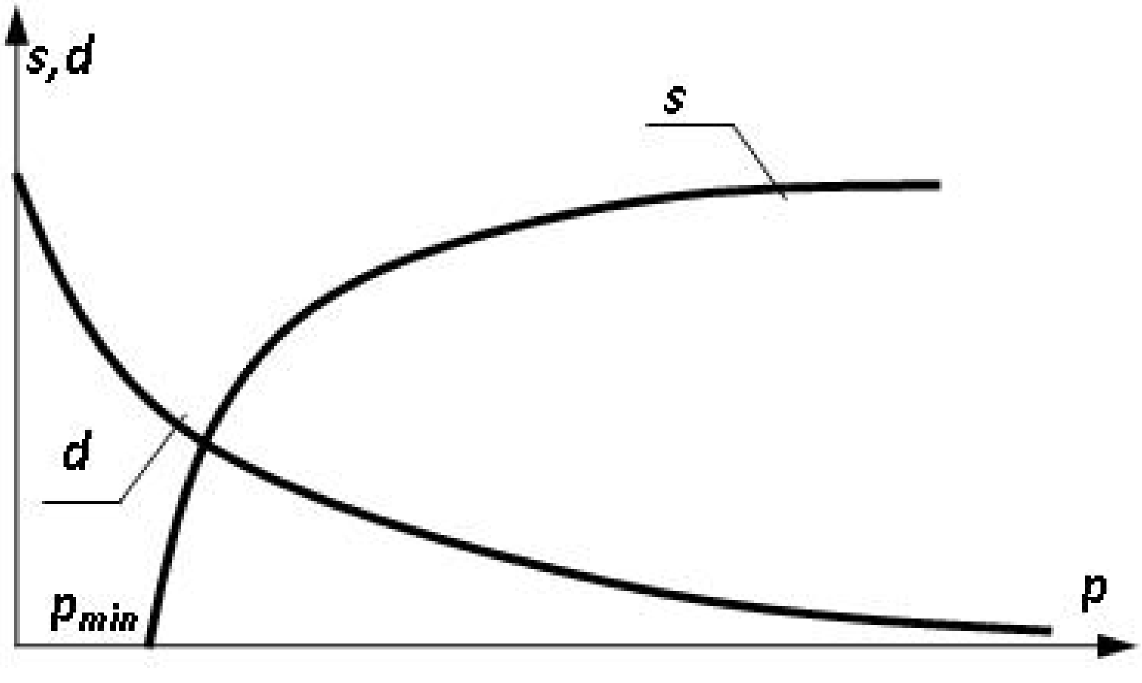


Пример 2. «Спрос-предложение»

Критика модели:

1. **d**, **s** – нелинейно зависят от цены.

2. Цена не формируется на основе «справедливого» равенства между спросом и предложением



Пример 3. Динамика популяций

Популяцией в биологии называют сообщество особей одного вида, занимающих некоторую область пространства на нашей планете.

- Что получится, если поместить тысячу карасей в пруд с ограниченными пищевыми ресурсами?
- Что изменится, если выпустить туда еще пятьдесят щук, поедающих в среднем по два карася в день?
- Какая судьба постигнет вирус, вызывающих гибель определенного вида животных и распространяющийся с известной скоростью, зависящей от плотности популяции?
- Какими темпами будет увеличиваться численность людей на Земле?

Пример 3. Модель Мальтуса

Первая модель динамики популяций была предложена священником Томасом Мальтусом еще в 1778 году в опубликованной им работе «Трактат о народонаселении». Хотя модель, предложенная Мальтусом, касалась народонаселения Земли, ее можно распространить на любую популяцию живых организмов.

Содержательная постановка задачи:

Как будет изменяться численность популяции, если сдерживающие факторы (болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания и т.п.) отсутствуют?

Пример 3. Модель Мальтуса

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования является некоторая популяция организмов;
- сдерживающие факторы роста популяции отсутствуют;
- скорость прироста численности популяции прямо пропорциональна величине численности популяции.

Последние два предположения являются достаточно грубыми. Их применение оправдано на достаточно коротком начальном этапе развития популяции.

Пример 3. Модель Мальтуса

Математическая постановка задачи

Пусть *x(t)* – численность популяции в момент времени *t*. Функцией прироста *R(t)* называют относительное изменение численности за время a*t*:

$$R(t) = (x(t+\mathrm{a}t) - x(t)) / x(t)\ \mathrm{a}t$$

Если эта величина – константа r, то закон, управляющий динамикой в модели Мальтуса, имеет вид

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

Переходя к пределу по a*t*, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

при начальном условии $x(0) = x_0$.

Пример 3. Модель Мальтуса

Решение задачи

Для решения уравнения можно воспользоваться методом разделения переменных:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = r\int_{0}^{t} dt$$

или $\ln (x/x_0) = rt$

Окончательно $x(t) = x_0\, e^{rt}.$

Анализ результатов

Полученное решение по модели Мальтуса предсказывает неограниченный рост численности популяции по экспоненциальному закону. В действительности неограниченный рост невозможен, так как сдерживающие факторы присутствуют всегда. Численность популяции, как правило, испытывает небольшие колебания относительно некоторой величины.

Пример 3. Модель Ферхюльста

П.Ф. Ферхюльст сформулировал в 1845 году закон, содержащий ограничение на рост популяции.

Содержательная постановка задачи:

Как будет изменяться численность популяции, если экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенного максимального размера x_{max} и что коэффициент прироста должен снижаться, когда размеры популяции приближаются к x_{max}.

Пример 3. Модель Ферхюльста

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования является некоторая популяция организмов;
- Будем измерять численность популяции в относительных единицах

$$X = x / x_{max}.$$

- функцию прироста по Ферхюльсту можно записать следующим образом

$$R(X) = r\,(1 - X).$$

Пример 3. Модель Ферхюльста

Математическая постановка задачи

Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = r\left(1 - X\right)X$$

при начальных условиях

$$X(0) = X_0.$$

Решение задачи

Уравнение можно проинтегрировать методом разделения переменных:

$$\frac{dX}{X\left(X-1\right)} = \frac{dX}{X-1} - \frac{dX}{X} = -rdt$$

в результате чего получаем решение: $X = \dfrac{X_0 e^{rt}}{1 - X_0\left(1 - e^{rt}\right)}$

Пример 3. Модель Ферхюльста

Анализ результатов:

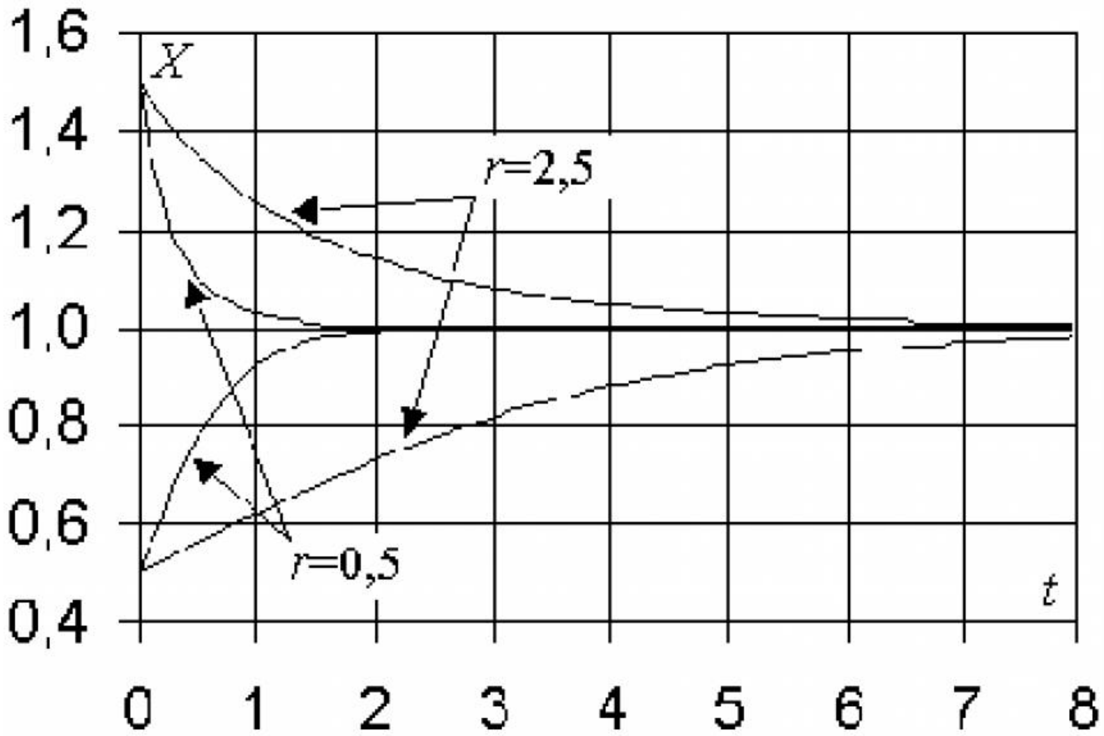


Рис. 3.8. Изменение относительной численности популяции

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Содержательная постановка задачи:

Рассмотрим ситуацию, когда в одной и той же местности проживают две популяции, имеющие схожий рацион питания. В этом случае эти популяции начинают конкурировать между собой за источники питания. Как будет изменяться численность этих двух популяций со временем?

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования являются две популяции организмов;
- Будем обозначать численность одной популяции через x, а другой через y.
- Пусть нам известны предельные численности популяций x^* и y^*, которые они могли бы достигать в данной области обитания при отсутствии конкурента.

Тогда функции прироста с учетом конкуренции можно записать следующим образом

$$R_x(x,y) = k_x(x^* - x) - k_{xy}\, y, \qquad R_y(x,y) = k_y(y^* - y) - k_{yx} x,$$

где k_x, k_y, k_{xy}, k_{yx} – положительные коэффициенты пропорциональности, учитывающие особенности каждой популяции и их взаимовлияние.

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Математическая постановка задачи

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = k_x\left(x^* - x\right)x - k_{xy}xy$$

$$\frac{dy}{dt} = k_y\left(y^* - y\right)y - k_{yx}xy$$

при начальных условиях

$x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$.

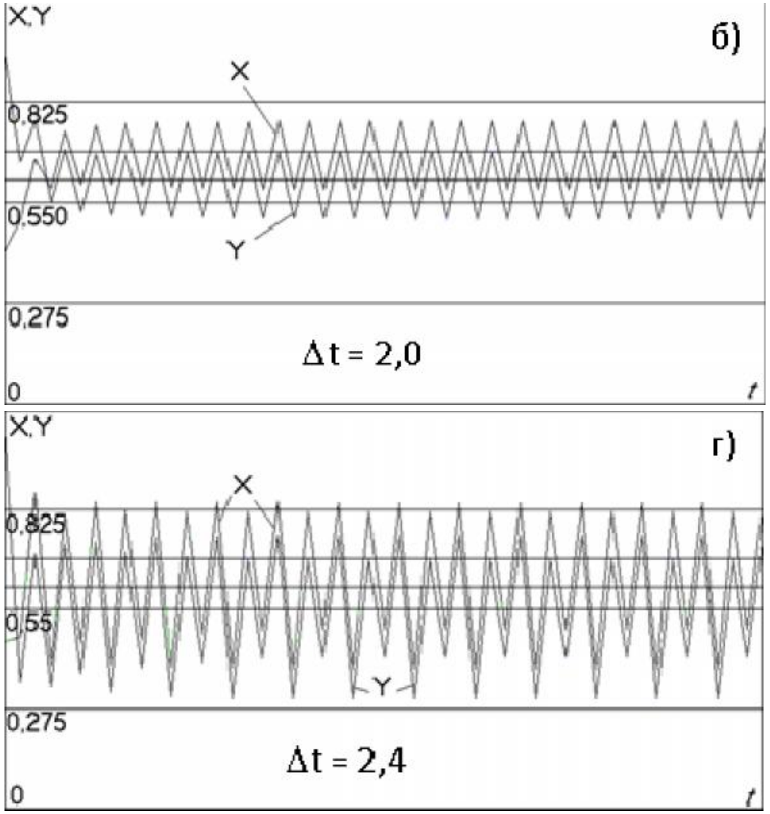
Если ввести относительные численности популяции $X = x/x^*$; $Y = y/y^*$, то получим систему ДУ вида:

$$\frac{dX}{dt} = r_x\left(1 - X - «_x Y\right)X\,,$$

$$\frac{dY}{dt} = r_y\left(Y^* - Y - «_y X\right)Y$$

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Анализ результатов:



Пример 4. Гармонический осциллятор

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к неподвижной стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела. Масса тела и жесткость пружины известны.

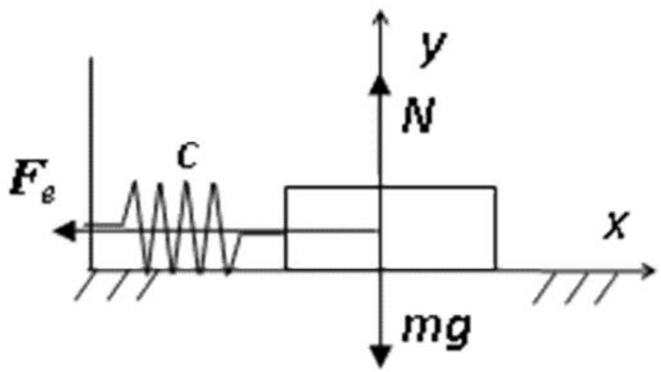


Рис. 3.18. Схема задачи

Концептуальная постановка:

- Объектом исследования является поступательно движущееся тело массой *m*, принимаемое за материальную точку.
- Движение тела подчиняется второму закону Ньютона.

Пример 4. Гармонический осциллятор

Концептуальная постановка:

- Тело находится под действием трех сил: тяжести $m\mathbf{g}$, реакции $\mathbf{N}$ и силы упругости $\mathbf{F}_e$. Так как поверхность гладкая, то силой трения пренебрегаем.
- Тело совершает прямолинейные колебательные движения.
- В уравновешенном состоянии центр масс тела находится в положении с координатами (x_p, y_p).
- При малом растяжении пружины величину возникающей в ней силы упругости можно представить линейной зависимостью (закон Гука) $F_e = c\Delta x$, где $\Delta x = x - x_p$ – растяжение пружины (отклонение тела от положения равновесия x_p), c – жесткость пружины. Направлена сила в сторону положения равновесия.

Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\mathbf{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Гармонический осциллятор

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = F_e = -c\left(x - x_p\right); \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Гармонический осциллятор

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = a \sin(kt+\alpha),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \sin\sim = \frac{x_0}{a}, \quad \cos\sim = \frac{v_0}{ka}$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к неподвижной стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела, если на него действует сила вязкого трения. Масса тела и жесткость пружины известны.

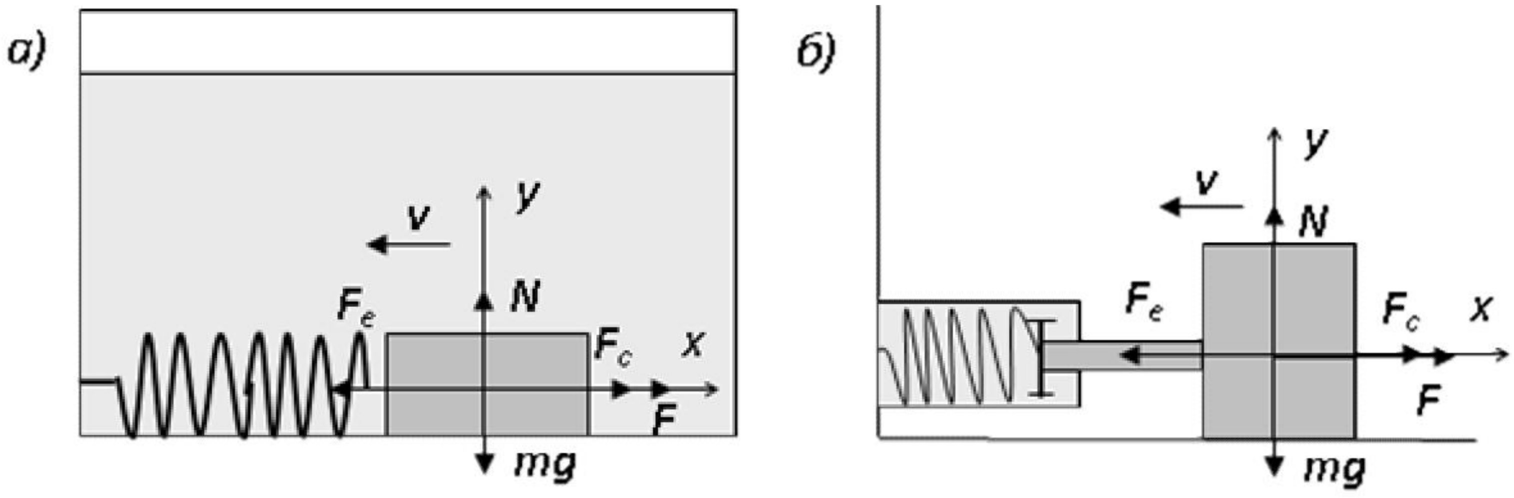


Рис. 3.22. Схемы конструкций с вязкими средами

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Концептуальная постановка:

- …..
- Тело находится под действием четырех сил: тяжести $m\mathbf{g}$, реакции $\mathbf{N}$, силы упругости $\mathbf{F}_e$ и силы вязкого трения.
- Сила вязкого трения прямо пропорциональна скорости тела и направлена против направления его движения: $\mathbf{F}_c$ = –«$\mathbf{v}$ (« – коэффициент сопротивления, величина постоянная)
- При малом растяжении пружины величину возникающей в ней силы упругости можно представить линейной зависимостью (закон Гука) $F_e=cax$, где $ax=x–x_p$ – растяжение пружины (отклонение тела от положения равновесия x_p), c – жесткость пружины. Направлена сила в сторону положения равновесия.

Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\mathbf{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\left(x - x_p\right) - 2n\,v; \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0.$$

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = ae^{-nt} \sin (k_n t + \sim),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(v_0 + nx_0\right)^2}{k_n^2}}, \qquad ctg\sim = \frac{v_0 + nx_0}{x_0 k_n}$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

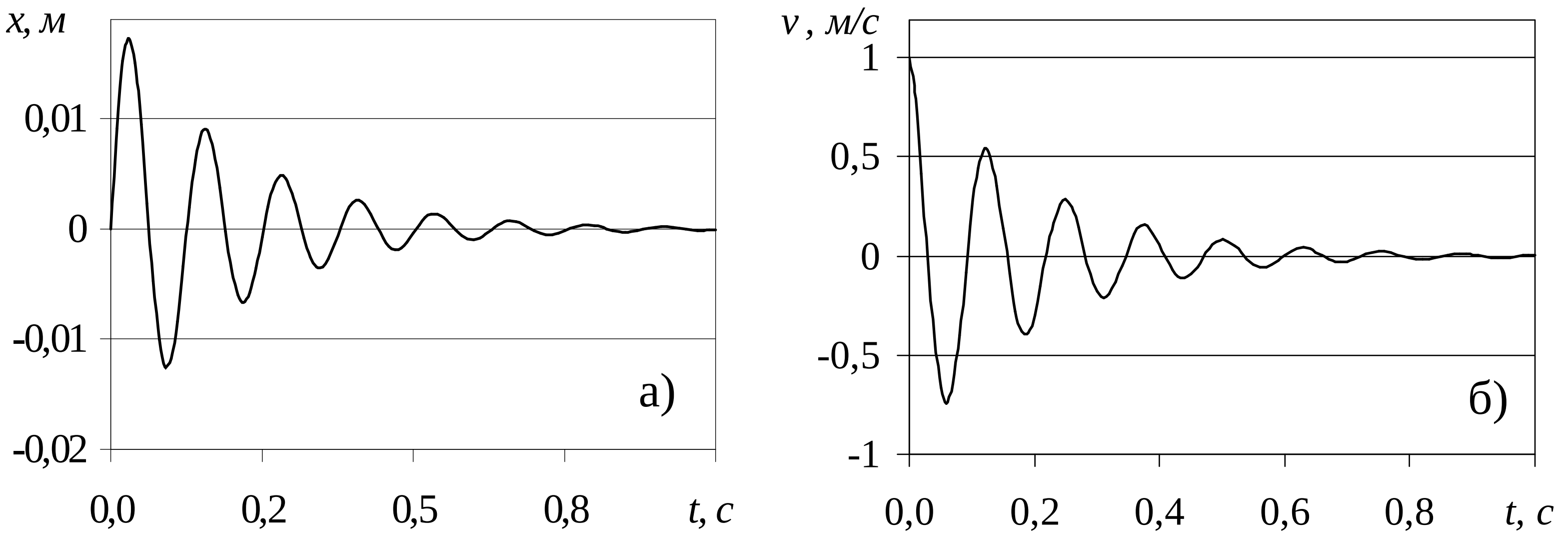


Рис. 3.23. Координата (а) и скорость (б) центра масс тела в вязкой среде

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

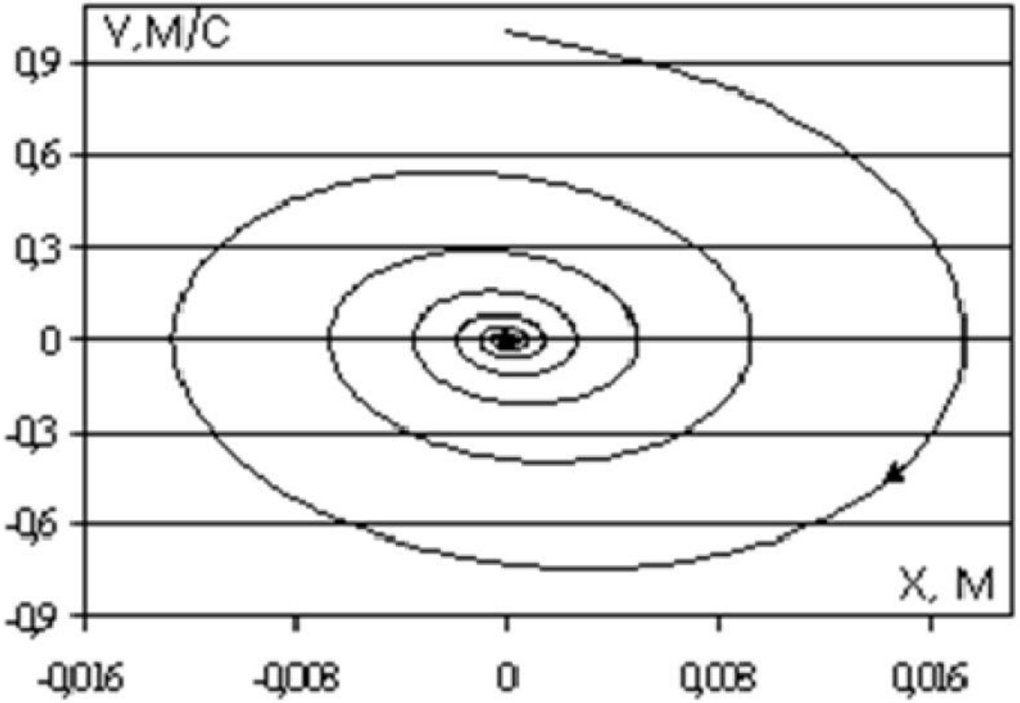


Рис. 3.24. Фазовая траектория движения точки в вязкой среде

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

n > k – апериодическое движение

При достаточно большом сопротивлении, когда $k_a^2 = n^2 - k^2 > 0$, решение примет вид

$$x = e^{-nt}\left(x_0 ch\, k_a t + \frac{v_0 + n x_0}{k_a} sh\, k_a t \right)$$

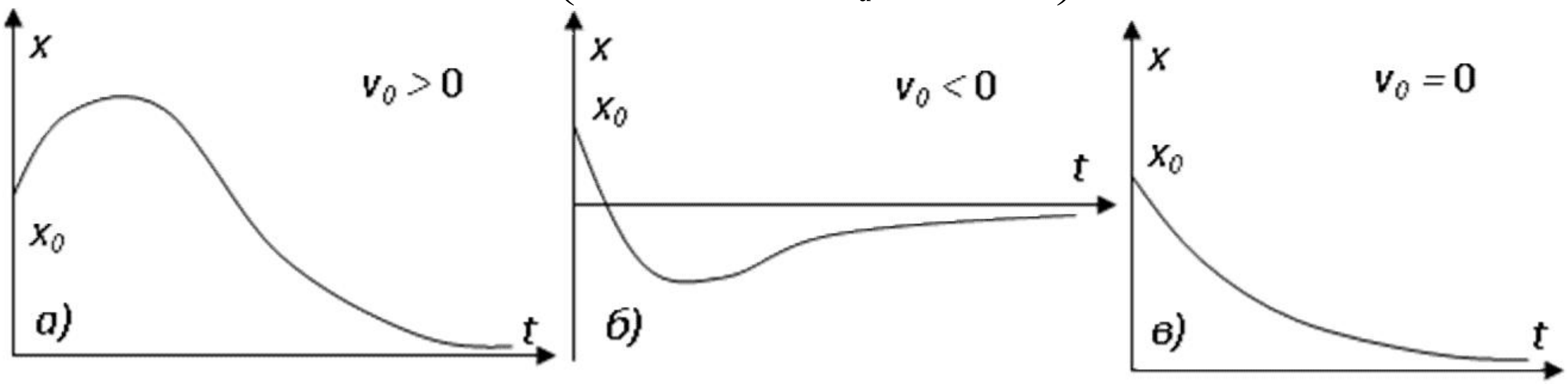
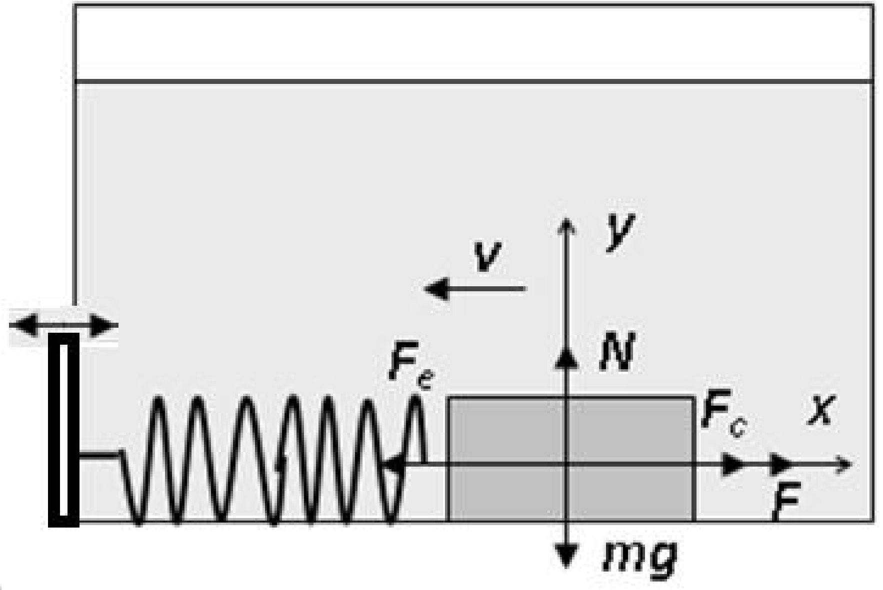


Рис. 3.25. Виды апериодического движения при $x_0 > 0$

Пример 4. Вынужденные колебания

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела, если стена совершает колебания заданной амплитуды и частоты. Масса тела и жесткость пружины известны.



Пример 4. Вынужденные колебания

Концептуальная постановка:

- …..
- Будем считать, что на стенку действует вынуждающая сила, приводящая к ее колебаниям по закону

X(t)=Xmax*cos(wt),

где Xmax – амплитуда, w – частота вынуждающей силы.

- Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\boldsymbol{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Вынужденные колебания

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\left(x - x_{стенки}\right) - 2n\,v; \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = x_0\,, \qquad v(0) = v_0.$$

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Вынужденные колебания

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = X_{\max} \cos(\mu t),\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_n t + \sim),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_n^2 - \mu^2}}, \qquad ctg\sim = \frac{v_0 + nx_0}{x_0\sqrt{k_n^2 - \mu^2}}$$

При $\omega^2 \to k_n^2$ имеем **резонанс**.