Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Кафедра математического моделирования систем и процессов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

к.ф.-м.н., доц. П.С. Волегов

Основные определения

Случайный процесс – это случайная величина, зависящая от времени.

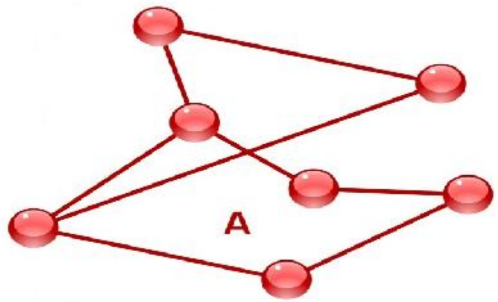
Сечением случайного процесса будем называть случайную величину, характеризующую исследуемое случайное явление в некоторый момент времени, то есть это временной срез *случайного процесса.*

Случайный процесс называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t_0 и не зависят от того, когда и как *система* пришла в это состояние.

Примеры случайных процессов

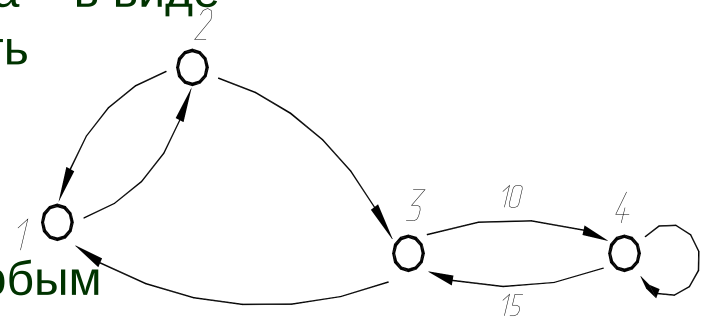
1. Техническое устройство *S* состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Требуется определить вероятность нахождения ТУ в нерабочем состоянии.
2. Рассматривается автоматическая телефонная стация (АТС) на 5 линий связи. Интенсивность поступающего потока заявок составляет 2 вызова в минуту. Средняя длительность одного звонка равна 1 минуте. Требуется определить вероятность отказа и среднее число занятых каналов.
3. В супермаркете можно одновременно открыть до 15 касс. При какой интенсивности потока покупателей необходимо открыть 6 касс, чтобы средняя длина очереди не превышала 4 человека?

Некоторые определения из теории графов



Граф – математический объект, который состоит из обозначений элементов произвольной природы, называемых *вершинами*, и обозначений связей между ними, называемых *ребрами*.

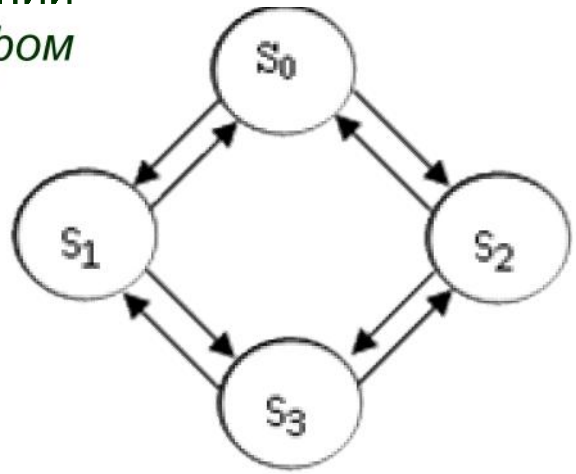
На рис. справа приведен пример графа, у которого вершины обозначены в виде кружочков, а ребра – в виде линий. Стрелки указывают на несимметричность некоторых связей. Такой граф называется *ориентированным*.



Каждая пара вершин может быть соединена любым количеством ребер. Чтобы ввести другие различия между ребрами – кроме несимметричности, – им приписывают различные веса. Такие графы называются *взвешенными*.

Граф состояний системы

Техническое устройство *S* состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся случайное время. Графическое изображение возможных состояний системы и порядок переходов называется *графом состояний системы*.



Возможные состояния системы:
S_0 – оба узла исправны;
S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен;
S_2 – второй узел ремонтируется, первый исправен;
S_3 – оба узла ремонтируются.
Переходы системы *S* из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или другого узла или окончания ремонта.

Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однотипных ситуаций, следующих одна за другой в какие-то случайные моменты времени.

Важнейшей характеристикой потока событий является его *интенсивность* ª – среднее число событий, приходящихся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (ª=*const*), так и зависящей от времени *t*.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность ª стационарного потока должна быть постоянной.

Потоки событий

Поток событий называется *потоком без последействия*, если для любых двух непересекающихся участков времени $^2_1$ и $^2_2$ число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.

Поток событий называется *ординарным*, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по несколько событий сразу. Например, поток событий – прохождение автомобилей мимо наблюдателя по дороге с однорядным движением. Поток поступления вагонов на железнодорожную станцию не является ординарным, так как вагоны прибывают на станцию составами.

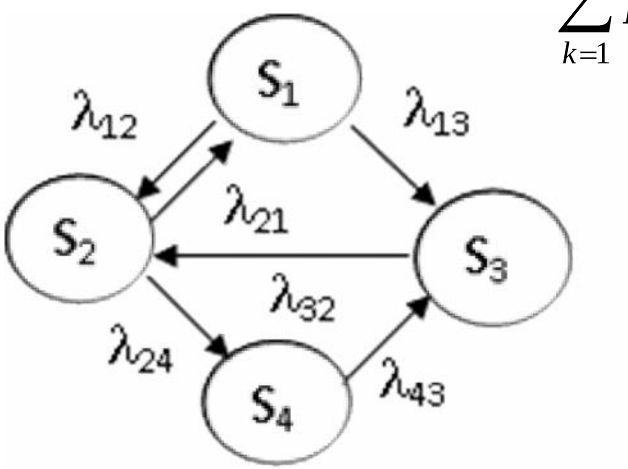
Поток событий называется *простейшим (или стационарным пуассоновским)*, если он обладает сразу тремя свойствами: *стационарен, ординарен и не имеет последействия*.

Уравнения Колмогорова для вероятности состояний системы

Назовем вероятностью *i*-ого состояния вероятность $p_i(t)$ того, что система в момент времени *t* находится в состоянии S_i. Так как число состояний конечно и система должна находится хотя бы в одном из них, то в любой момент времени справедливо следующее, так называемое *нормировочное условие*:

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(t) = 1$$

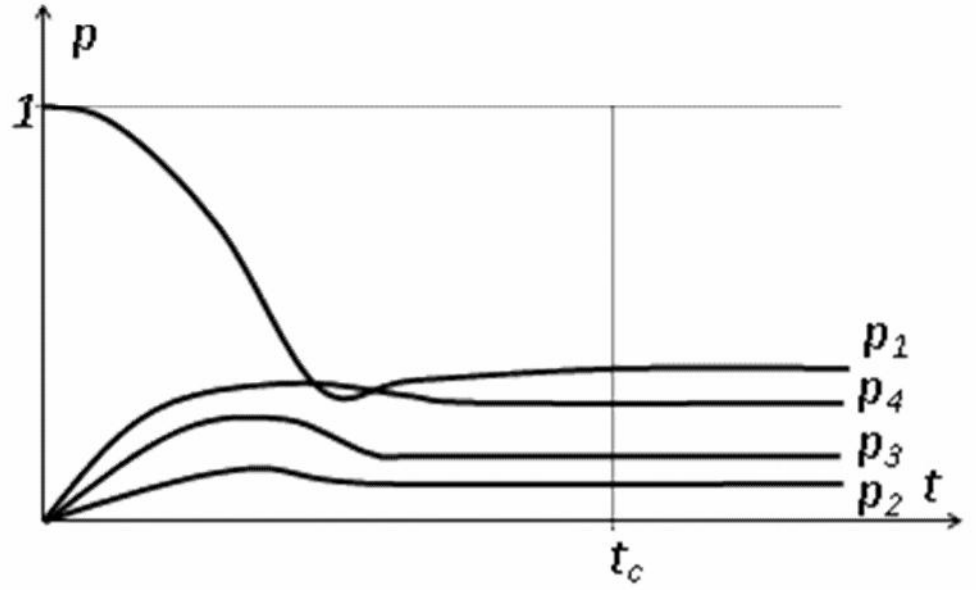
$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = a_{21} p_2 - (a_{12} + a_{13}) p_1, \\ \dfrac{dp_2}{dt} = a_{12} p_1 + a_{32} p_3 - (a_{24} + a_{21}) p_2, \\ \dfrac{dp_3}{dt} = a_{31} p_1 + a_{43} p_4 - a_{32} p_2, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = a_{24} p_2 - a_{43} p_4. \end{cases}$$



Уравнения Колмогорова для вероятности состояний системы. Финальные вероятности

$$\begin{cases} 0 = a_{21} p_2 - (a_{12} + a_{13}) p_1, \\ 0 = a_{12} p_1 + a_{32} p_3 - (a_{24} + a_{21}) p_2, \\ 0 = a_{31} p_1 + a_{43} p_4 - a_{32} p_2, \\ 0 = a_{24} p_2 - a_{43} p_4. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(t) = 1$$



Системы массового обслуживания (СМО)

Под СМО понимают системы, на вход которых подается случайный поток однотипных *заявок* (событий), обработка которых выполняется одним или несколькими однотипными *каналами* (устройствами).

СМО	***Канал***	***Поток событий***
Телефонная станция		
Ремонтная мастерская		
Железнодорожная касса		
Участок цеха		
Больница (стационар)		
Перекресток		
Магазин		
Морской порт		

Системы массового обслуживания (СМО)

Под СМО понимают системы, на вход которых подается случайный поток однотипных *заявок* (событий), обработка которых выполняется одним или несколькими однотипными *каналами* (устройствами).

СМО	***Канал***	***Поток событий***
Телефонная станция	Телефонная линия	Звонки
Ремонтная мастерская	Мастер	Заявки на ремонт
Железнодорожная касса	Кассир	Пассажиры
Участок цеха	Отдельный станок	Детали на обработку
Больница (стационар)	Больничная койка	Больные
Перекресток	Направление переезда	Автомашины
Магазин	Продавец	Покупатели
Морской порт	Причал	Суда под разгрузку

Системы массового обслуживания (СМО)

СМО могут быть одноканальными и многоканальными, с ограниченной или неограниченной очередью или с отказами.

Параметры эффективности системы:

- среднее число заявок, обслуженных в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- средняя длина очереди;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее число заявок, получивших отказ в обслуживании
- и так далее.

Многоканальная СМО с отказами

Рассмотрим модель *n*-канальной СМО с отказами.
Подобную схему можно применить, например, к телефонной станции (если все каналы заняты, то звонок не обслуживается).
Примем следующие предположения:

- Все каналы однотипны.
- Время обслуживания заявки в канале случайно и образует простейший поток интенсивностью μ.
- Поступающий поток заявок интенсивностью λ будем считать простейшим.
- Система может иметь $n+1$ состояний: S_0 – все каналы свободны; S_1 – занят один канал; S_2 – заняты два канал и так далее.
- Если все каналы системы заняты, то очередная заявка не будет удовлетворена.

Многоканальная СМО с отказами

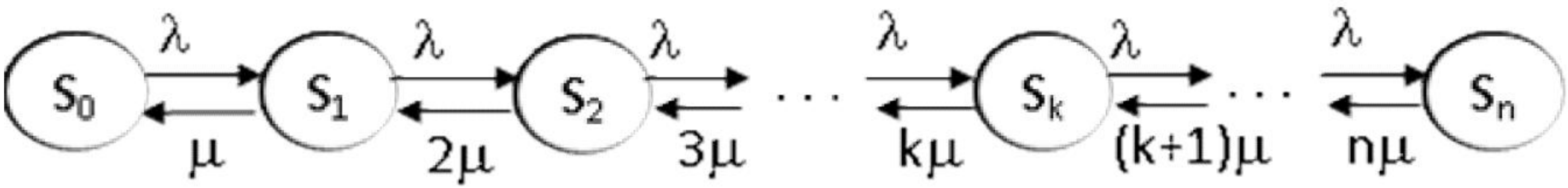


Рис. Граф состояний

$$S_0:\quad \mu p_1 - \lambda p_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$S_1:\quad 2\mu p_2 + \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0,$$

$$S_2:\quad 3\mu p_3 + \lambda p_1 - (\lambda + 2\mu) p_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad p_3 = \frac{\lambda^3}{2\cdot 3\mu^3} p_0,$$

$$S_{k-1}:\quad k\mu p_k + \lambda p_{k-2} - (\lambda + (k-1)\mu) p_{k-1} = 0 \quad\Rightarrow\quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0.$$

Многоканальная СМО с отказами

Приведенная интенсивность заявок ~=ª/«

$$p_0 = \left(1 + \sim + \frac{\sim^2}{2!} + \frac{\sim^3}{3!} + \ldots + \frac{\sim^n}{n!}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\sim^k}{k!}\right)^{-1}, \; p_k = \frac{\sim^k}{k!} p_o$$

Вероятность отказа системы равна $P_{отк} = p_n = \frac{\sim^n}{n!} p_o$

Вероятность обслуживания заявки $Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\sim^n}{n!} p_o$

Абсолютной пропускной способностью называют среднее число заявок, обслуженных системой в единицу времени *A*=ª*Q*.

Среднее число загруженных каналов:

$N_з = p_1 + 2p_2 +$ ú $+ np_n$.

Коэффициент загрузки одного канала как отношение среднего числа загруженных каналов к их общему количеству: $K_з = N_з / n$.

Пример

Рассматривается автоматическая телефонная стация (АТС) на 5 линий связи. Интенсивность поступающего потока заявок составляет 2 вызова в минуту. Средняя длительность одного звонка равна 1 минуте. Требуется определить вероятность отказа и среднее число занятых каналов.

Итак, даны следующие данные: n=5; ª=2 выз./мин.; $t_{обс}$=1 мин.
По средней длительности одного звонка можно определить «=1/$t_{обс}$=1.
Тогда ~=ª/«=2. Для определения параметров АТС построим следующую таблицу:

k	$\alpha_k/k!$	P_k	$k\ p_k$
0	1,000	0,138	0,000
1	2,000	0,275	0,275
2	2,000	0,275	0,550
3	1,333	0,183	0,549
4	0,667	0,092	0,368
5	0,267	0,037	0,185
	p_0=0,138	$\Sigma\ p_k$=1,000	$N_з$=1,927

Пример

k	$\alpha_k/k!$	P_k	$k\,p_k$
0	1,000	0,138	0,000
1	2,000	0,275	0,275
2	2,000	0,275	0,550
3	1,333	0,183	0,549
4	0,667	0,092	0,368
5	0,267	0,037	0,185
	p_0=0,138	$\Sigma\, p_k$=1,000	$N_з$=1,927

Вероятность отказа $P_{отк}$=0,037 или 3,7%, то есть 37 заявок из 1000 в среднем получают отказ.
Вероятность, что все каналы свободны, составляет P_0=0,138, что говорит о том, что 13,8% времени все каналы простаивают одновременно.
Среднее число загруженных каналов составляет $N_з$=1,927.
Коэффициент загрузки одного канала составляет $K_з$= 0,39, то есть в среднем один канал работает лишь 39% времени, а 61% – простаивает.

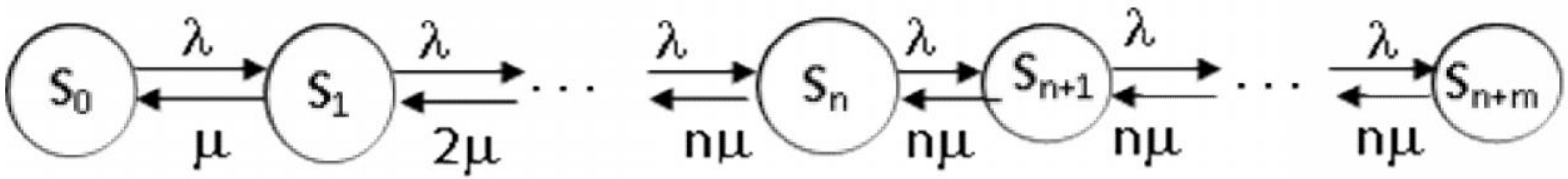
Многоканальная СМО с очередью

Рассмотрим модель *n*-канальной СМО с неограниченной очередью.

Примем следующие предположения:

- Все каналы однотипны.
- Время обслуживания заявки в канале случайно и образует простейший поток интенсивностью μ.
- Поступающий поток заявок интенсивностью λ будем считать простейшим.
- Если все каналы системы заняты, то очередная заявка ставится в конец очереди.
- Система может иметь, вообще говоря, бесконечное число состояний: S_0 – все каналы свободны; S_1 – занят один канал; S_2 – заняты два канал; S_n – заняты все каналы; S_{n+1} – одна заявка в очереди; S_{n+m} – m заявок в очереди, и так далее.

Многоканальная СМО с отказами



Граф состояний

$$p_k = \frac{\sim^k}{k!} p_0 , \quad k = 1,2, \ldots , n,$$

$$p_k = \frac{\sim^n}{n!} \left(\frac{\sim}{n} \right)^{k-n} p_0 , \quad k > n .$$

$$p_0 = \left(1 + \sim + \frac{\sim^2}{2!} + \frac{\sim^3}{3!} + \ldots + \frac{\sim^n}{n!} \left(1 + \frac{\sim}{n} + \frac{\sim^2}{n^2} + \frac{\sim^3}{n^3} + \ldots \right) \right)^{-1}$$

Многоканальная СМО с отказами

Если ~/*n*<1, то $1+\frac{\sim}{\mathrm{n}}+\frac{\sim^2}{n^2}+\frac{\sim^3}{n^3}+\ldots=\frac{1}{1-\sim/n}=\frac{n}{n-\sim}$

$$p_0=\left(1+\sim+\frac{\sim^2}{2!}+\frac{\sim^3}{3!}+\ldots+\frac{\sim^{n+1}}{n!(n-\sim)}\right)^{-1},$$

$$p_k=\frac{\sim^k}{k!}p_0\,,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$p_k=\frac{\sim^n}{n!}\left(\frac{\sim}{n}\right)^{k-n}p_0\,,\quad k>n$$

Среднее число загруженных каналов:

$N_з$=~ .

Коэффициент загрузки канала:

$K_з$=~/*n.*

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч}=\sum_{k=1}^{\infty}kp_{n+k}=\frac{\sim^{n+1}p_0}{n\cdot n!(1-\sim/n)^2}$$

Среднее время ожидания в очереди:

$W_{оч}=L_{оч}/$a