ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Применение фрактальных методов в нефтегазовом деле

Грайфер Лазарь Борисович

к.ф.-м.н., доцент кафедры

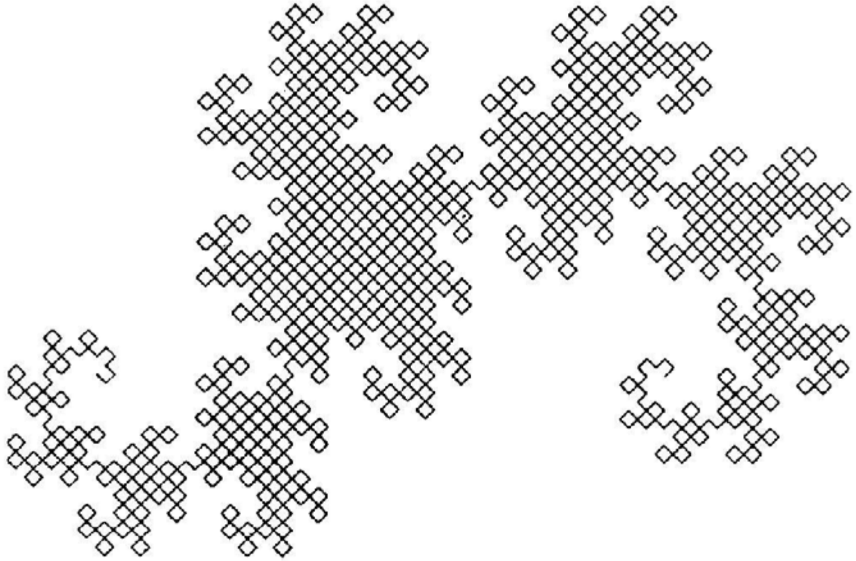
Высшей математики ПНИПУ

Проект «Одаренные дети. Математика»

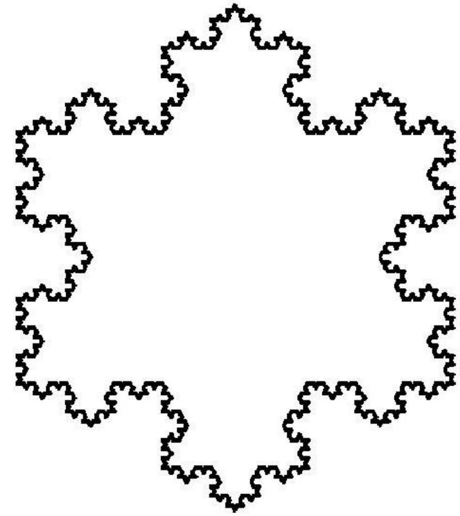
Понятие фрактала

- от лат. *fractus* – дробный, ломаный
- Фракталы – геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия.
- Самоподобие как основная характеристика фрактала означает, что он более или менее единообразно устроен в широком диапазоне масштабов.

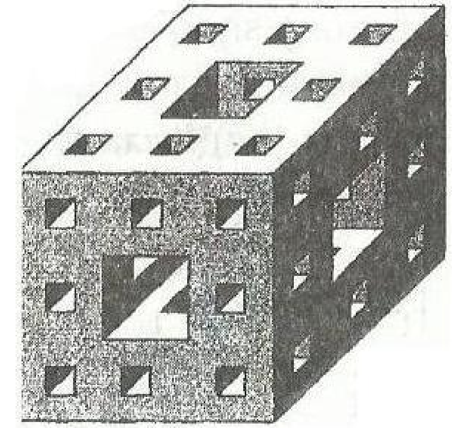
Примеры фрактальных множеств



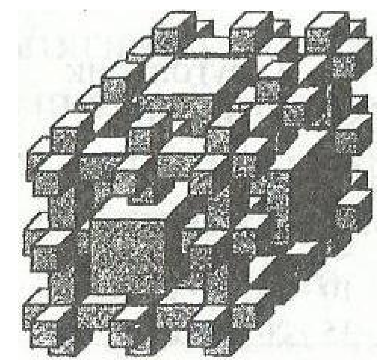
Дракон Хартера – Хейтуэя

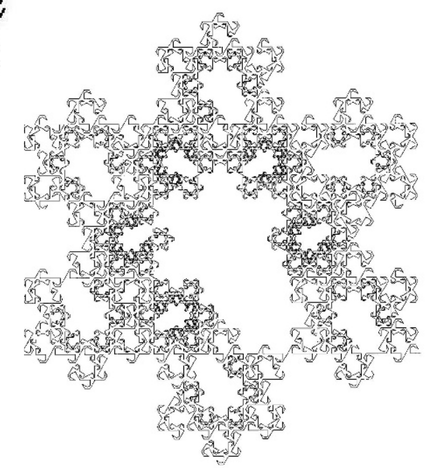


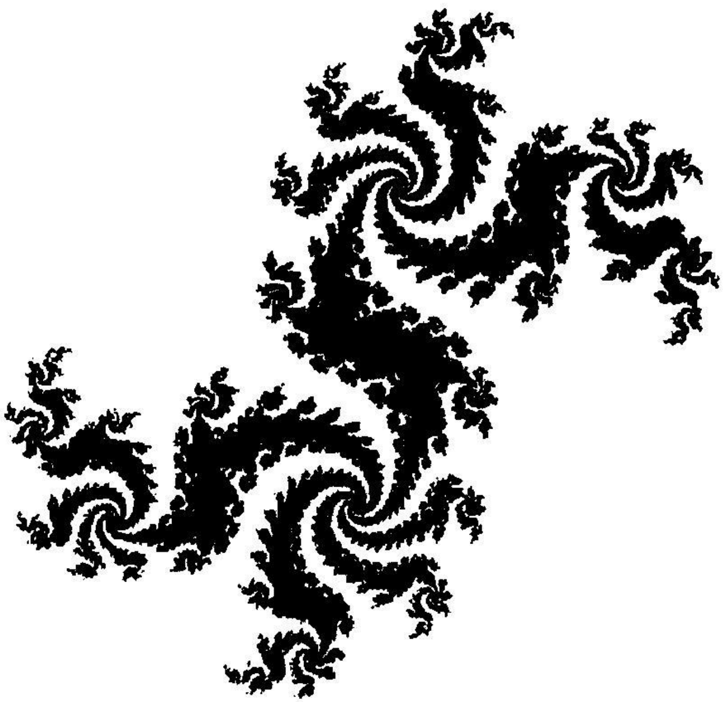
Снежинка Коха



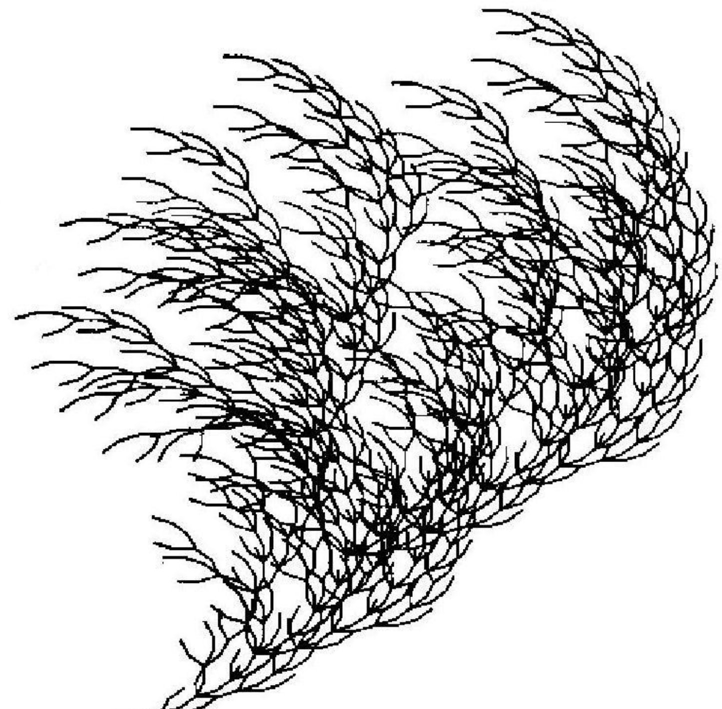
Губка Менгера



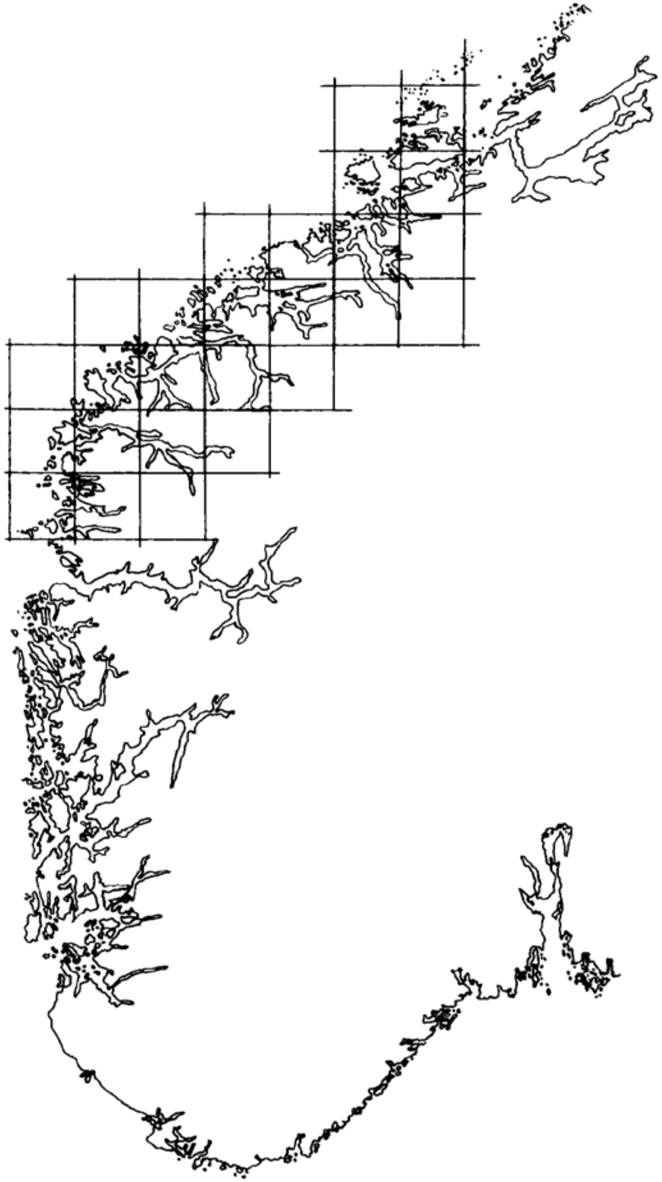




Дракон Жюлиа



Фрактал Куст



ь по Хаусдорфу-зиковичу

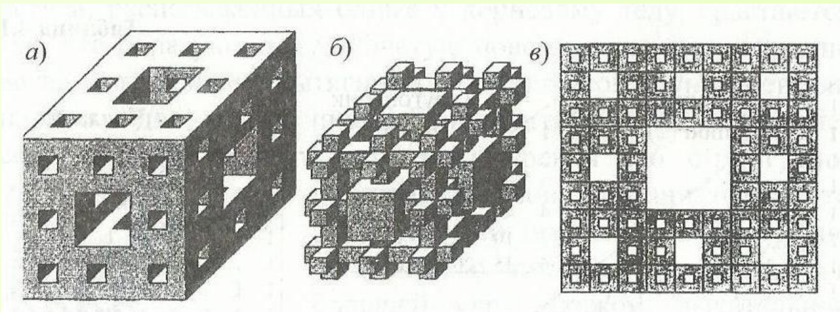
- ычисляя длину то есть меру M_d, мы рывали множество точек различными метрическими объектами (отрезками, ками, кубами)
- да, где γ(d) – геометрический ффициент, который зависит от выбора рывающего объекта, d – размерность ы. Тогда

$$= \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow[\delta\to 0]{} \begin{cases} 0, & \text{íńëč} \;\; d > D \\ \infty, & \text{íńëč} \;\; d < D \end{cases}$$

- личина *D*, при которой этот предел ичен от нуля и бесконечности, есть мерность Хаусдорфа-Безиковича или сдорфова размерность. Для актальных структур она, как правило, елочисленная.

Вычисление Фрактальной размерности южного побережья Норвегии методом покрытия

Губка Менгера



- Регулярный фрактал (рис.а), являющийся трехмерным представлением ковра Серпинского (рис. в)
- Размерность губки Менгера

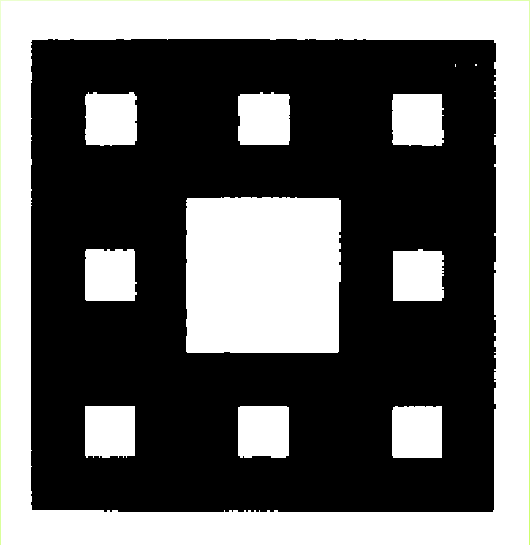
$$d = -\frac{\ln N(n)}{\ln h(n)} = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2{,}7$$

- Построение губки Менгера начинается с куба длина ребра, которого равна единице
- Каждая грань куба делится на 9 равных квадратиков
- В результате исходный куб разбивается на 27 одинаковых кубиков с длиной ребра, равной 1/3
- Затем удаляя 7 кубиков (один центральный и 6 из центра каждой граней)
- В результате из 27 остается 20 маленьких кубиков
- Такая итерационная процедура продолжается до бесконечности.

Губка Менгера

- Представим проекцию грани губки Менгера через прямое (Кронекерово) произведение двух одинаковых матриц

  a= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



- Ставим в соответствие множеству точек 1, а пустотам – 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод расчета фрактальной размерности временных рядов

Для временных рядов при подсчете фрактальной размерности следует принимать во внимание сами замеры, а не отрезки соединяющие их. Возьмем n замеров с шагом Δt, в течение интервала T

A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	…	A_m	B_m
y_1		y_1		y_1		…	y_1	
y_2	$\lvert y_1-y_2\rvert$		$\lvert y_1-y_3\rvert$		$\lvert y_1-y_4\rvert$	…		
y_3	$\lvert y_2-y_3\rvert$	y_3				…	…	$\lvert y_1-y_{1+m}\rvert$
y_4	$\lvert y_3-y_4\rvert$		$\lvert y_3-y_5\rvert$	y_4		…		
y_5	$\lvert y_4-y_5\rvert$	y_5			$\lvert y_4-y_7\rvert$	…	y_{1+m}	
y_6	$\lvert y_5-y_6\rvert$		$\lvert y_5-y_7\rvert$			…		
y_7	$\lvert y_6-y_7\rvert$	y_7		y_7		…		
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_{n-2}	$\lvert y_{n-3}-y_{n-2}\rvert$	y_{n-2}				…		
y_{n-1}	$\lvert y_{n-2}-y_{n-1}\rvert$		$\lvert y_{n-2}-y_n\rvert$		$\lvert y_{n-3}-y_n\rvert$	…		$\lvert y_{n-m}-y_n\rvert$
y_n	$\lvert y_{n-1}-y_n\rvert$	y_n		y_n		…	y_n	

первая выборка содержит все замеры интервала времени T

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ (столбец A_1 таблицы);

вторая выборка образуется из множества замеров, отстоящих друг от друга на расстоянии $2^*\Delta t$

$y_1, y_3, y_5, \ldots, y_{n-2}, y_n$ (столбец A_2 таблицы) и т.д.

Так длина первой выборки равна сумме значений в столбце B_1 таблицы

$|y_1-y_2| + |y_2-y_3| + \ldots |y_{n-1}-y_n|$;

длина второй выборки равна сумме значений в столбце B_2 таблицы 1

$|y_1-y_3| + |y_3-y_5| + \ldots |y_{n-2}-y_n|$;

и т.д.

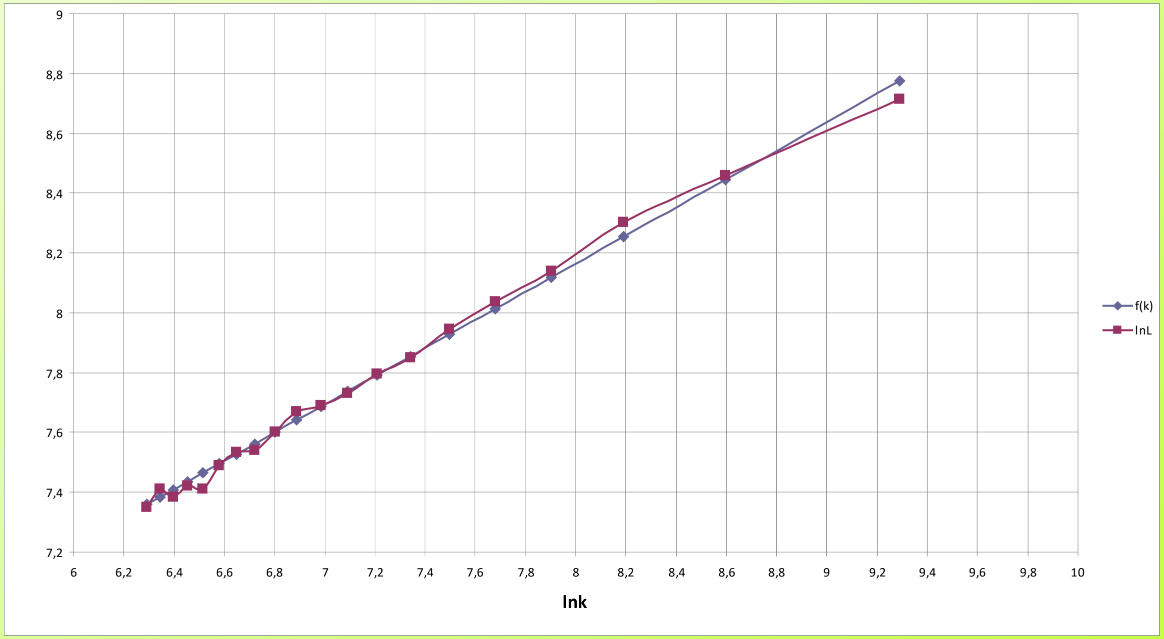
Длина кривой L при малых значениях Δt_m хорошо описывается зависимостью $L \sim \Delta t_m^{1-D}$.

Учитывая, что Δt_m обратно пропорционально $k = \frac{n-1}{m}$ (числу отрезков разбиения интервала времени T), можно записать $L \sim k^{D-1}$.

Перестроим эту зависимость в координатах $\log L$ - $\log k$. При больших значениях k данная зависимость ложится на прямую линию по наклону которой и определяется значение D.

Метод наименьших квадратов

- Для нахождения приближающей функции можно использовать метод наименьших квадратов.
- Суть метода: сумма квадратов отклонений эмпирических и аналитически вычисленных значений функций от одного аргумента должна быть наименьшей $S(a,b)=(y_1-\bar{y}_1)^2+(y_2-\bar{y}_2)^2+\ldots+(y_n-\bar{y}_n)^2 \to \mathrm{m}$
- где - y_i экспериментально определенное значение, $\bar{y}_i$ - значение приближающей функции.



на графике представлены зависимость *lnL=f(lnk)* и ее приближающая функция *y=f(x)* для временного ряда с периодом неделя

Результаты

- Метод подсчета фрактальной размерности временных рядов отрабатывался при обработке данных стоимости акций американской нефтяной компании ExxonMobil за последние 40 лет.
- Фрактальная размерность временных рядов стоимости акций рассматривалась при разных значениях периода: сутки, недели, года.

Условия задания множества	**Интервал**	Сутки	Неделя	Год
	Число замеров	10 000	2 000	41
Фрактальная размерность (D)		1,47	1,42	1,93

Метод расчета показателя Херста

Вновь выделим из исходной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ массивы данных $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m-1})$, содержащих m последовательных замеров ($k = 1, \ldots, N - m+1$). Определим по каждому из этих массивов размах

где $$E_{\max} = \max_{1 \le l \le m} \left(\sum_{j=1}^{l} \left(x_{k+j-1} - M_k \right) \right), \qquad E_{\min} = \min_{1 \le l \le m} \left(\sum_{j=1}^{l} \left(x_{k+j-1} - M \right) \right).$$

$R_k = E_{max} - E_{min}$,

Здесь M_k - среднее по выделенному массиву значение x. $$M_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l} x_{k+j-1}$$

Рассмотрим приведенное значение размаха, осредненного по всем массивам объема m:

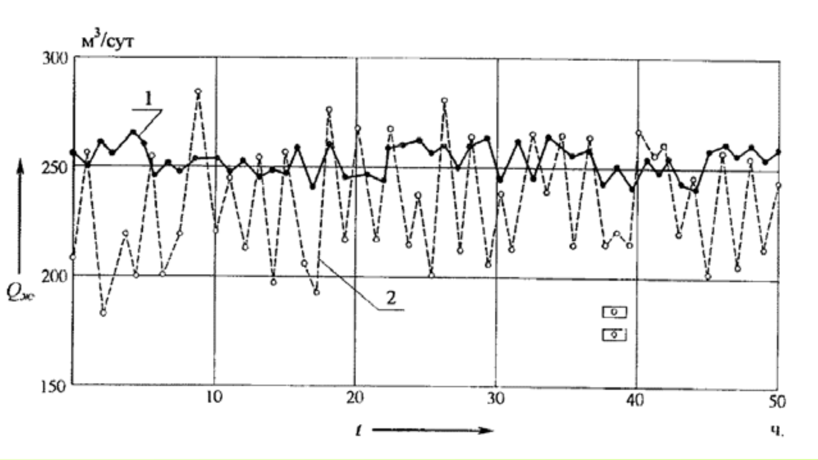
$$\left(\frac{R}{S} \right)_m = \frac{1}{r} \sum_k \frac{R_k}{S_k}, \qquad S_k = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(x_{k+j-1} - M_k \right)^2},$$

где r число массивов объема m, S_k - стандартное отклонение. Показано, что для временных рядов многих природных процессов величина $\left(\frac{R}{S} \right)_m$ растет с увеличением m по степенному закону $\left(\frac{R}{S} \right)_m = C\, m^H$

показатель Херста (H) определяется по углу

наклона прямой $$\ln \left(\frac{R}{S} \right)_m = \ln C + H \ln m .$$

Результаты



	Эффективная (1)	Неэффективная (2)
Фрактальная размерность (D)	1,91	2,07
Показатель Херста (H)	0,16	0,155

- Проведена обработка данных замеров дебита жидкости *Q(t),* снятые при работе на эффективной и неэффективной ветви регулировочной кривой *Q=Q(V)* (дебита жидкости от расхода газа).