ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Доц. каф ММСП ПНИПУ,
к.ф.-м.н. Няшина Наталья Дмитриевна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Пример $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8, \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 12, \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 14. \end{cases}$

Система имеет единственное решение, если $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса - прямой метод решения СЛАУ, решение получается за конечное, заранее определенное, число арифметических операций.

Пример
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8, \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 12, \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 14. \end{cases}$$

Прямой ход

1 шаг
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 12, \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 14. \end{cases}$$

2 шаг
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 14. \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

3 шаг
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16, \\ 0x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 22. \end{cases}$$

4 шаг
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8, \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Обратный ход

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_2 = 8 - 2x_3 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 = 8 - 2x_3 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

В общем виде СЛАУ $Ax = f$

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = f_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = f_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = f_3 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = f_m \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

Прямой ход:

Пусть $a_{11} \neq 0$ - ведущий элемент

поделим первое уравнение системы на этот коэффициент, остальные уравнения преобразуем так, чтобы в 1-м столбце остались нулевые коэффициенты ,тогда

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \ldots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 = f_1 / a_{11} \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = f_2^{(1)} = f_2 - a_{21} \cdot y_1 \\ 0 \cdot x_1 + a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = f_3^{(1)} = f_3 - a_{31} \cdot y_1 \\ \ldots \\ 0 \cdot x_1 + a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + a_{m3}^{(1)} \cdot x_3 + \ldots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = f_m^{(1)} = f_m - a_{m1} \cdot y_1 \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot c_{1j}, \quad i, j = \overline{2, m}$$

МЕТОД ГАУССА

Здесь $a_{22}^{(1)} \neq 0$ - ведущий элемент

$$
\begin{cases}
1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \ldots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \ldots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 = f_2^{(1)} / a_{22}^{(1)} \\
0 \cdot x_1 + 0 x_2 + a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = f_3^{(2)} = f_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot y_2 \\
\ldots \\
0 \cdot x_1 + 0 x_2 + a_{3m}^{(2)} \cdot x_3 + \ldots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = f_m^{(2)} = f_m^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot y_2
\end{cases}
$$

$$
a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot c_{2j}^{(1)}, \quad i, j = \overline{3, m}
$$

МЕТОД ГАУССА

Окончательно система сводится к верхнему треугольному виду с 1 на главной диагонали

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + c_{12}\cdot x_2 + c_{13}\cdot x_3 + \ldots + c_{1m}\cdot x_m = y_1 \\ \qquad\qquad 1\cdot x_2 + c_{23}\cdot x_3 + \ldots + c_{2m}\cdot x_m = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1\cdot x_3 + \ldots + c_{3m}\cdot x_m = y_m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\cdot x_m = y_m \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

Обратный ход

$$\begin{cases} x_m = y_m, \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1m} x_m, \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2m} x_m - c_{m-2m-1} x_{m-1}, \\ \ldots \\ x_1 = y_1 - \sum_{k=2}^{m} c_{1k} x_k. \end{cases}$$

МЕТОД ГАУССА

Вычисление определителя матрицы

$$\det A = \prod_{j=1}^{m} a_{jj}^{(j-1)}$$

Определитель равен произведению ведущих элементов

Замечания:

- Число операций метода Гаусса пропорционально m^3
- Погрешность метода Гаусса обусловлена накоплением ошибок округления при арифметических вычислениях
- Ограничение использования метода – ведущие элементы должны быть отличны от нуля.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

- Итерационные методы основаны на многократном уточнении приближенно заданного решения.

- Процедура метода повторяется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения

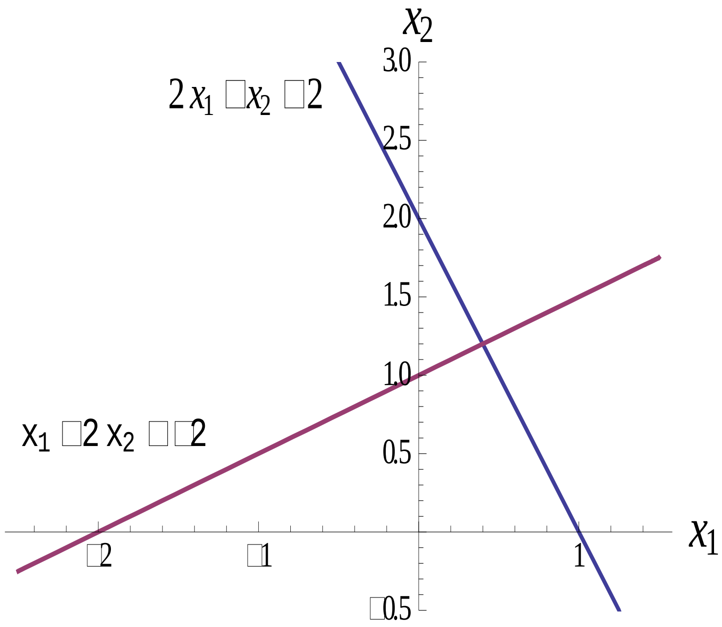
- Общий вид итерационного метода

$$\boxed{x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + c, \quad x^{(0)} - \text{задано}}$$

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ. Метод Зейделя

- Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$



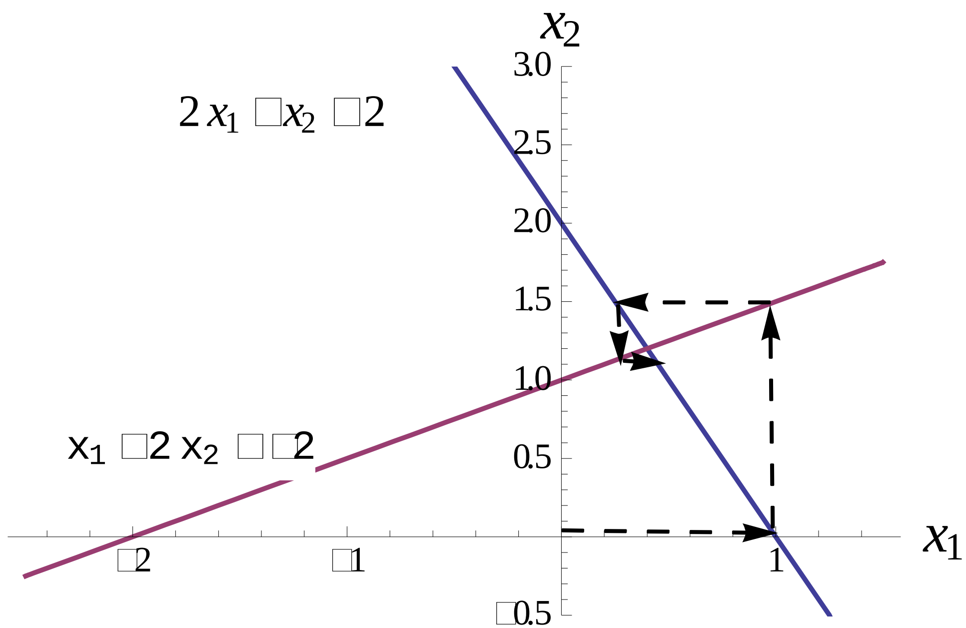
- Итерационная процедура

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{x_2^{(k)}}{2} + 1, \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{x_1^{(k+1)}}{2} + 1 \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	1	1,5
2	0,25	1,125
3	0,4375	1,21875



Метод сходится к точному решению x = (0,4; 1,2)

МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

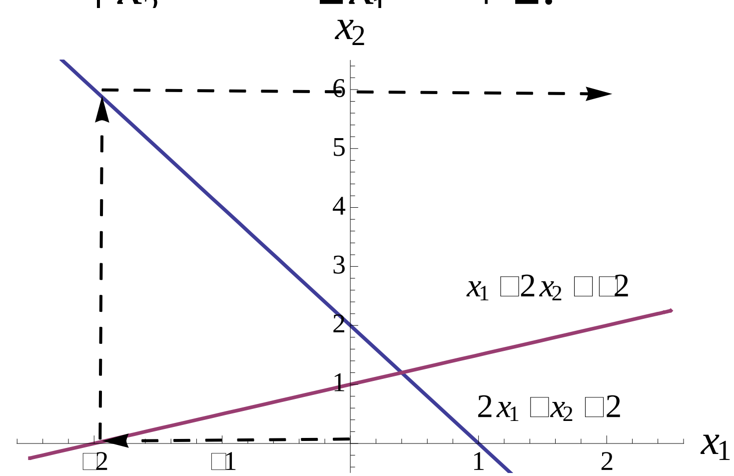
Переставим уравнения в системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2, \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Построим итерационную процедуру

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2x_2^{(k)} - 2, \\ x_2^{(k+1)} = -2x_1^{(k+1)} + 2. \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	-2	6
2	10	-18



Метод расходится!

МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

В общем виде алгоритм итерационной процедуры метода Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \ldots + b_{1m}x_m^{(k)} + c_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{23}x_3^{(k)} + \ldots + b_{2m}x_m^{(k)} + c_2, \\ x_3^{(k+1)} = b_{31}x_1^{(k+1)} + b_{32}x_2^{(k+1)} + \ldots + b_{3m}x_m^{(k)} + c_3, \\ \ldots \\ x_m^{(k+1)} = b_{m1}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k+1)} + \ldots + b_{mm-1}x_{m-1}^{(k+1)} + c_m. \end{cases}$$

- Вычисления производятся до достижения точности

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \equiv \left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

- Численное решение сходится к точному для матрицы с диагональным преобладанием

- Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: высш. шк., 2004. – 480 с.
- Бояршинов М.Г. Численные методы. Ч.1. - Пермь: ,изд-во Перм. гос.техн. ун-та, 1998. – 200 с.