ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Доц. каф ММСП ПНИПУ,
к.ф.-м.н. Няшина Наталья Дмитриевна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Найти корни нелинейного уравнения

$$f(x) = 0$$

т.е. такие числа, $x_1, x_2, \ldots$ при подстановке которых в уравнение получаем верное числовое равенство

Решение осуществляется в два этапа:

- Отделение корней (грубое определение корней)
- Уточнение значения каждого корня до заданной точности одним из численных методов, в которых реализуются последовательные приближения

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Метод основан на теореме: функция, непрерывная в замкнутом интервале и принимающая на концах этого интервала значения разных знаков, хотя бы один раз обращается в нуль внутри этого интервала.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a_0, b_0]$.

Суть метода – в последовательном сокращении длины отрезка для локализации корня.

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Если $f(a_0)f(b_0)<0$, то найдем середину отрезка $c_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$

и вычислим $f(c_0)$.

Если $f(a_0)f(c_0)<0$, то $a_1=a_0$, $b_1=c_0$

Если $f(b_0)f(c_0)<0$, то $a_1=c_0$, $b_1=b_0$

Далее $$c_k=\frac{a_k+b_k}{2},\quad k=1,2,\ldots.$$

$$f(a_k)f(c_k)<0,\quad a_{k+1}=a_k,\quad b_{k+1}=c_k$$

$$f(b_k)f(c_k)<0,\quad a_{k+1}=c_k,\quad b_{k+1}=b_k$$

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

- Вычисления повторяются, пока не выполнится

$$\left|b_{k+1} - a_{k+1}\right| < \varepsilon$$

- Тогда приближенное значение корня уравнения

$$\tilde{x} \approx \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$$

- Погрешность на каждом шаге вычислений уменьшается в 2 раза . За k шагов начальная погрешность

$$\left|b_0 - a_0\right| \cdot 2^{-k} < \varepsilon$$

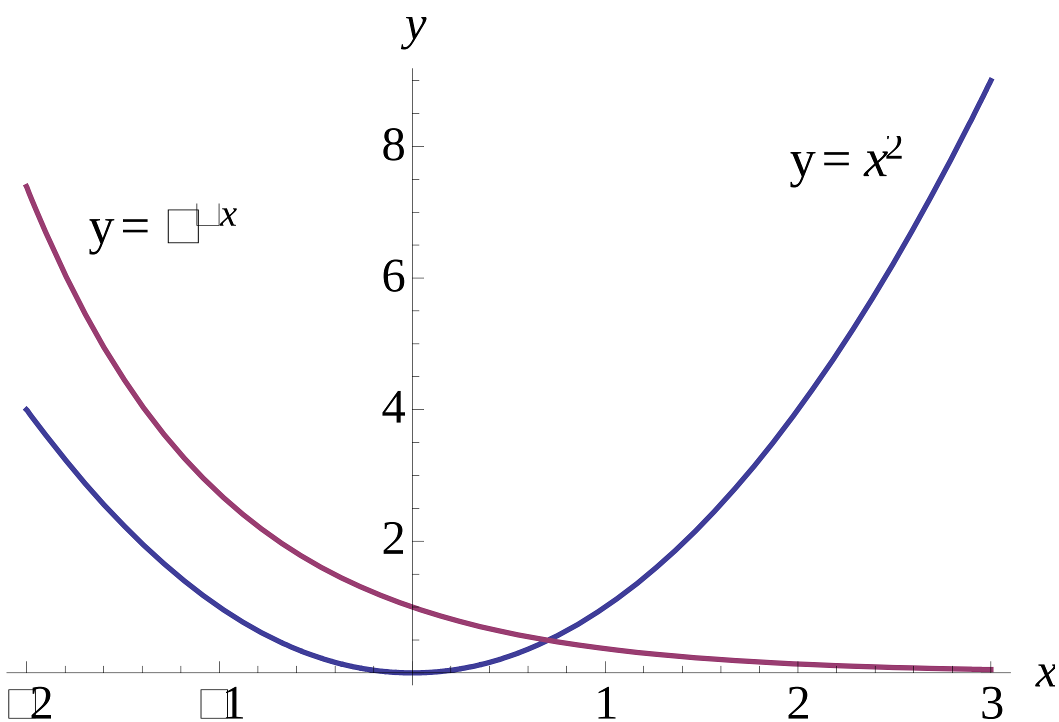
- Необходимое число шагов для заданной точности

$$k \geq \log_2 \frac{\left|b_0 - a_0\right|}{\varepsilon}$$

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Пример.

Решить уравнение $x^2 - e^{-x} = 0$



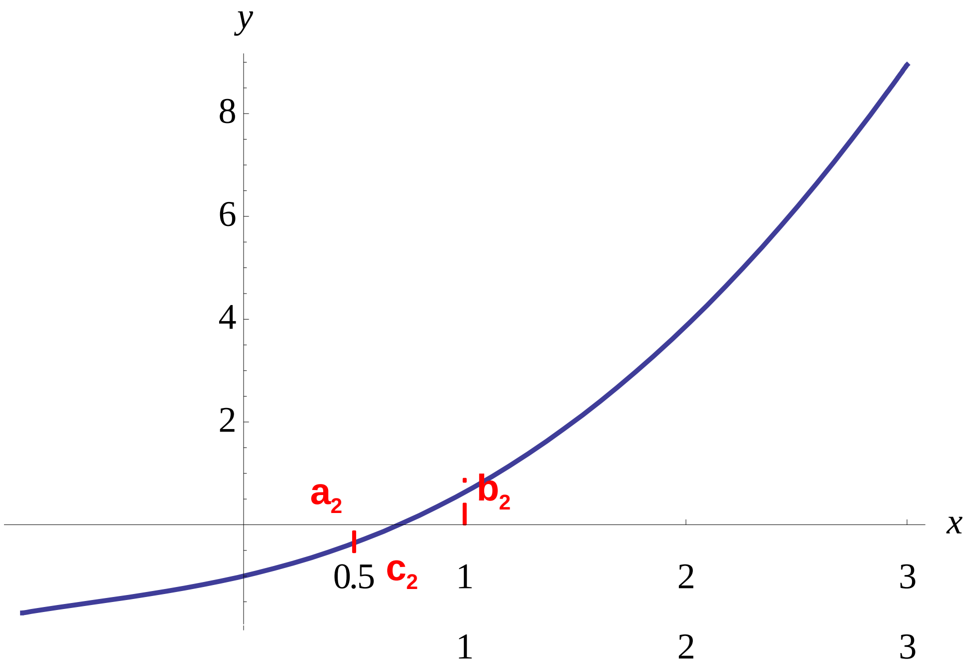
МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

$$x^2 - e^{-x} = 0$$

k	a_k	$f(a_k)$	b_k	$f(b_k)$	c_k	$f(c_k)$	$\lvert a_k - b_k \rvert$
0	0.00	- 1.00	2.00	3.86	1.00	0.63	2.00
1	0.00	- 1.00	1.00	0.63	0.50	- 0.36	1.0
2	0.50	- 0.36	1.00	0.63	0.75	0.09	0.5
3	0.50	- 0.36	0.75	0.09	0.63	- 0.14	0.25
4	0.63	- 0.14	0.75	0.09	0.69	- 0.03	0.13
5	0.69	- 0.03	0.75	0.09	0.72	0.03	0.06

И так далее...

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ



- Приближенное решение с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ x=0,71

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

- Достоинства метода:

Метод применим для любой непрерывной на отрезке функции, если на концах этого отрезка функция принимает значения разных знаков.

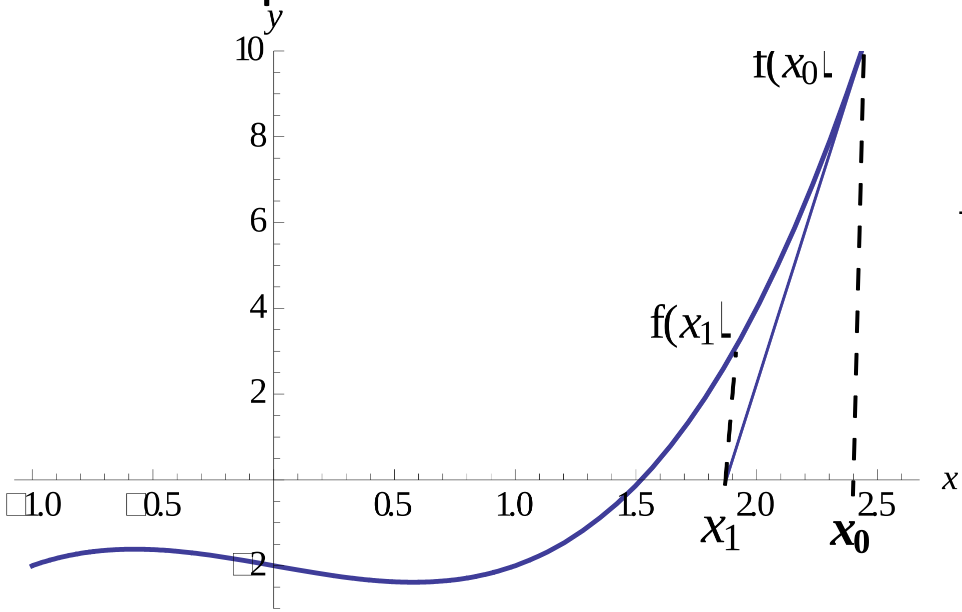
- Недостатки метода:

Метод не обобщается на случай системы нелинейных уравнений

Не может быть использован для определения корней четной кратности

МЕТОД НЬЮТОНА

- Метод касательных или линеаризации
- Выбирается начальное приближение для корня x_0, строится касательная к кривой в точке x_0.
- Следующее приближение – точка пересечения касательной с осью OX



$$\frac{f(x^{(0)})-0}{x^{(0)}-x^{(1)}}=tg\alpha=f'(x^{(0)})$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}-\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

МЕТОД НЬЮТОНА

- Расчетная схема:

$$\boxed{x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}}$$

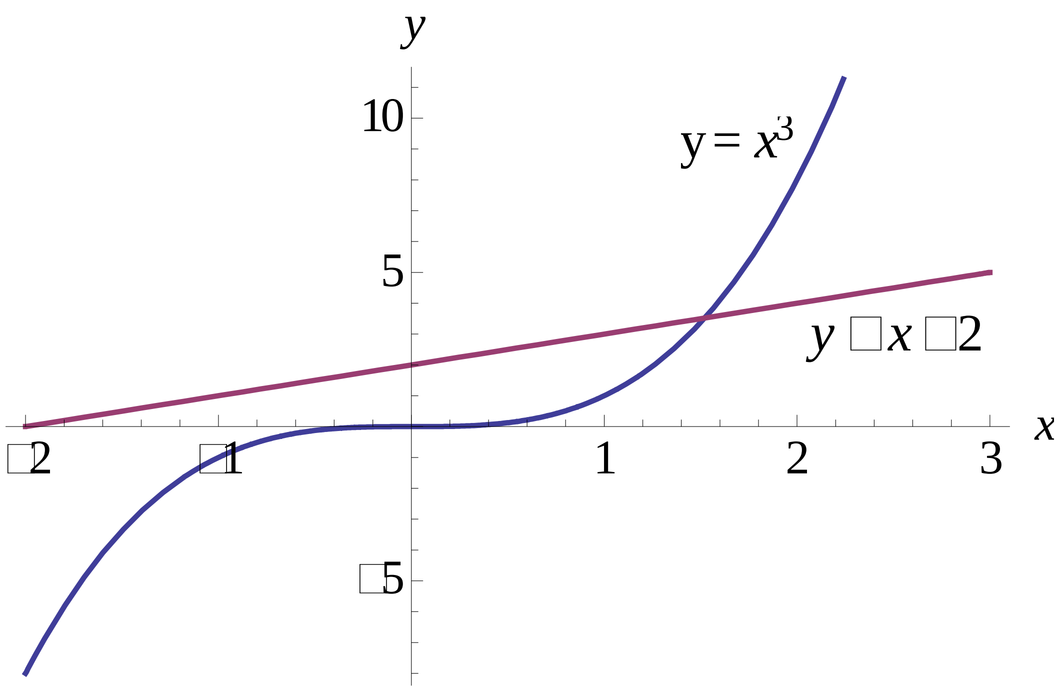
- Условие завершения расчетов: $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < \varepsilon$

- Метод быстро сходится к точному решению.
- Применим для решения систем нелинейных уравнений.
- Эффективен при выполнении жестких ограничений:
  - должна существовать 2-я производная
  - 1-ая производная не обращается в ноль $f'(x) \neq 0$
  - $f'(x),\ f''(x)$ производные не меняют знак

МЕТОД НЬЮТОНА

<u>Пример.</u>

Решить уравнение $x^3 - x - 2 = 0$



МЕТОД НЬЮТОНА

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|$
0	2.0000	4.0000	11.0000	
1	1.6364	0.7453	7.0331	0.3636
2	1.5303	0.0539	6.0263	0.1060
3	1.5214	0.0004	5.9443	0.0089

- Приближенное решение с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ $x = 1{,}52$

- Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: высш. шк., 2004. – 480 с.
- Бояршинов М.Г. Численные методы. Ч.1. - Пермь: ,изд-во Перм. гос.техн. ун-та, 1998. – 200 с.