ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Решение заданий, содержащих модули и параметры, функционально-графическим методом (по материалам ЕГЭ)

Владислав Григорьевич Рисберг,

учитель математики высшей категории, заместитель председателя краевой комиссии по проверке ЕГЭ

Проект «Одаренные дети. Математика».

Использование функционально-графического метода при решении уравнений и неравенств

- **перенести все члены** в левую часть уравнения (или распределить их по его обеим частям);
- **ввести функцию** для выражения в левой части (в каждой из частей);
- **рассмотреть основные свойства** введенных функций (D(f), E(f), монотонность и др.);
- схематически **построить график** этой функции (этих функций);
- составить **алгебраическую модель** (по условию);
- **решить** ее.

Назовите функцию и ее график:

$$y = ax + b, \quad y = ax, \quad y = \frac{k}{x}, \quad y = \frac{k}{x - a} + b,$$

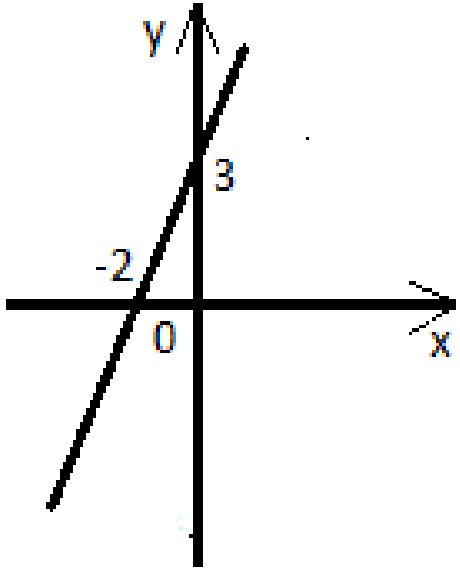
$$y = ax^2 + bx + c, \qquad y = a(x - m)^2 + n,$$

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

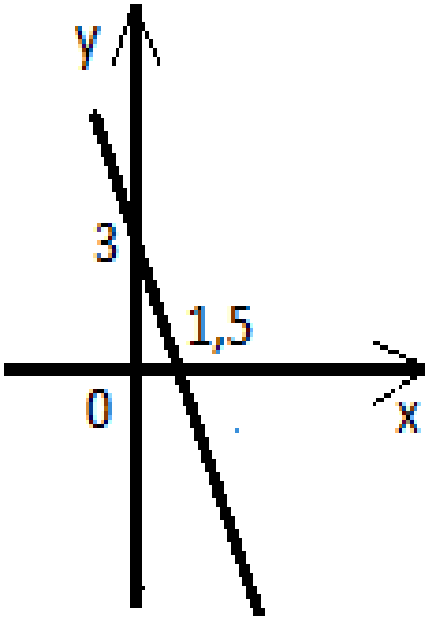
$$y = |x|, \quad y = |x - a| + b, \quad y = a^x, \quad y = \log_a x,$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

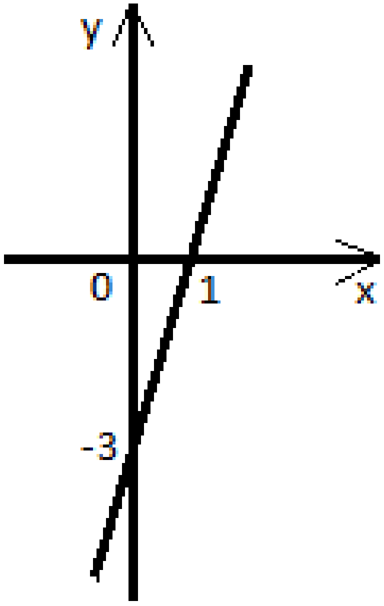
Линейная функция



$$y = 1{,}5x + 3$$



$$y = -2x + 3$$



$$y = 3x - 3$$

Найдите все значения *a* такие, что для любого *x* выполняется неравенство

$$|x+1|+2|x+a|>3-2a$$

$$|x+1|+2|x+a|+2a>3$$

$$f(x)=|x+1|+2|x+a|+2a$$

$$f(x)>3$$

$$f(x)=-x-1-2x-2a+2a$$

$$f(x)=-3x-1-\text{слева}$$

$$f(x)=x+1+2x+2a+2a$$

$$f(x)=3x+4a+1-\text{справа}$$

$$\begin{cases} f(-a)>3, \\ f(-1)>3 \end{cases} \quad \begin{cases} |a-1|+2a>3, \\ 2|a-1|+2a>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\ge 1, \\ a-1+2a>3, \\ 2a-2+2a>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1, \\ a>4/3, \\ a>5/4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a<1, \\ -a+1+2a>3, \\ -2a+2+2a>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ a>2, \\ 2>3 \end{cases}$$

$$\text{Ответ}: a>4/3.$$

Решите неравенство

$$4|x+3|+3|x-a| \le \sqrt{16-y^2}+2$$

$$f(x)=4|x+3|+3|x-a| \qquad g(y)=\sqrt{16-y^2}+2$$

$$f(x) \le g(y) \qquad \min f(x) \le \max g(y) \quad (*)$$

$$\min f(x) = f(-3) = 3|a+3| \qquad |a+3| \le 2$$

$$\max g(y) = g(0) = 6 \qquad -2 \le a+3 \le 2$$

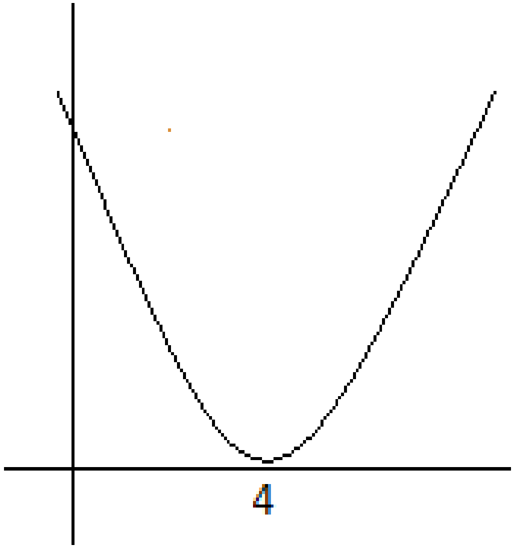
$$3|a+3| \le 6 \qquad -5 \le a \le -1$$

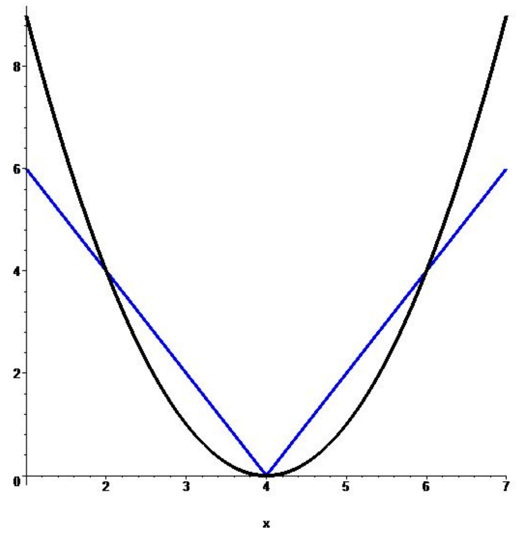
$$\text{Ответ}: a \in [-5; -1]$$

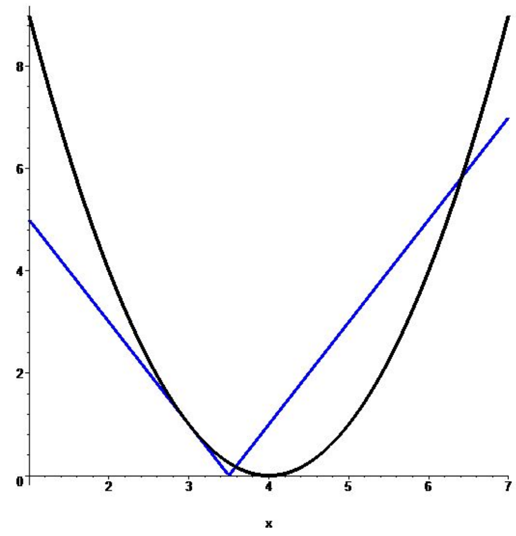
При каких значениях ***a*** уравнение $x^2 - 8x = 2|x-a| - 16$ имеет ровно 3 различных корня?

$$x^2 - 8x + 16 = 2|x-a| \qquad (x-4)^2 = 2|x-a|$$

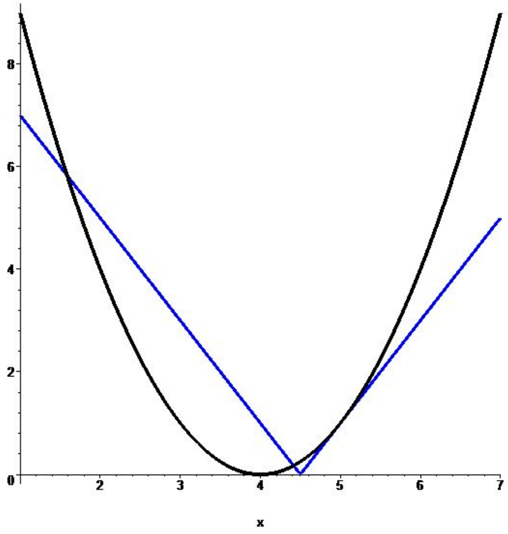
$$f(x) = (x-4)^2 \qquad g(x) = 2|x-a|$$







продолжение



$$2x - 2a = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 10x + 2a + 16 = 0$$

$$D/4 = 25 - 16 - 2a = -2a + 9$$

$$-2a + 9 = 0$$

$$a = 4{,}5$$

Ответ : 3,5; 4 и 4,5.

При каких значениях ***a*** система

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-4)^2=9, \\ y=\left|x-a\right|+1. \end{cases}$$

имеет ровно 3 различных решения?

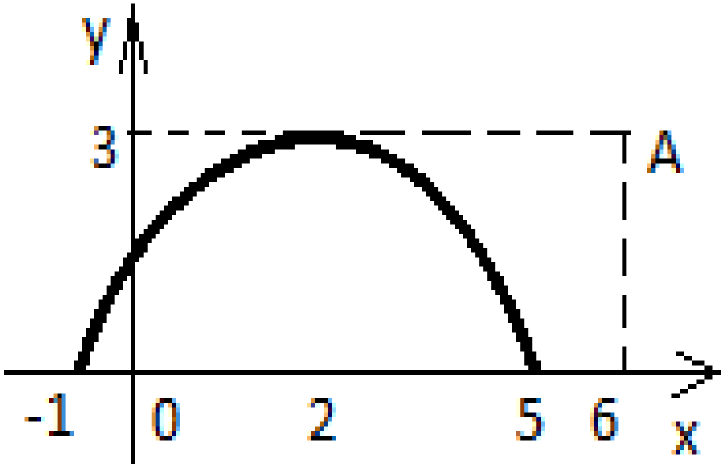
Ответ: $a \in \left\{5, 2+3\sqrt{2}, 8-3\sqrt{2}\right\}$

При каких значениях ***a*** уравнение $\sqrt{5+4x-x^2} = ax-6a+3$ имеет ровно один корень.

$$y = \sqrt{9-(4-4x+x^2)}$$

A(6; 3)

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y^2 = 9-(x-2)^2 \end{cases}$$



$$(x-2)^2 + y^2 = 3^2$$

$$y = a(x-6)+3$$

$$y = 3 \qquad y = 0x+3$$

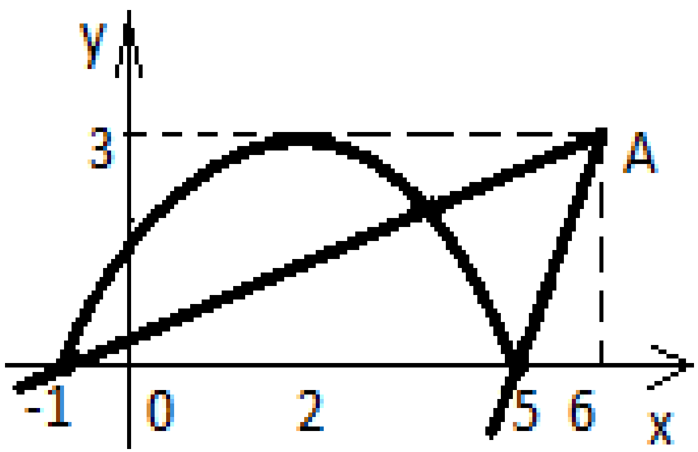
$$k = a$$

$$k = 0 \qquad a = 0$$

продолжение

$k = a$

$$y = kx + b,$$



$$k_1 = 3, \qquad a_1 = 3$$

$$k_2 = 3/7\,, \qquad a_2 = 3/7$$

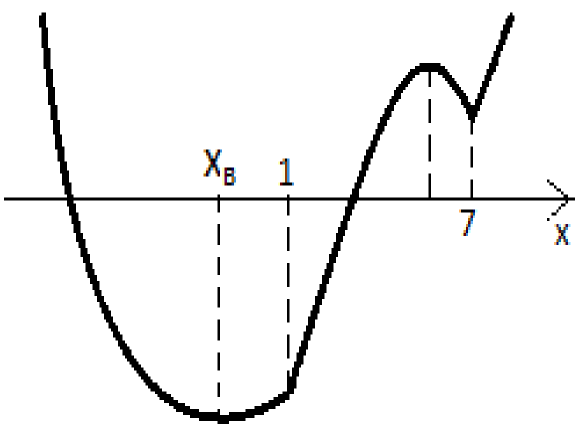
$$\text{Ответ}:\ a \in \left(\frac{3}{7}; 3\right] \cup \{0\}.$$

При каких значениях ***a*** наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ меньше единицы?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2(4-2a)x + 7, & x \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty), \\ -x^2 - 2(-4-2a)x + 7, & x \in (1; 7) \end{cases}$$

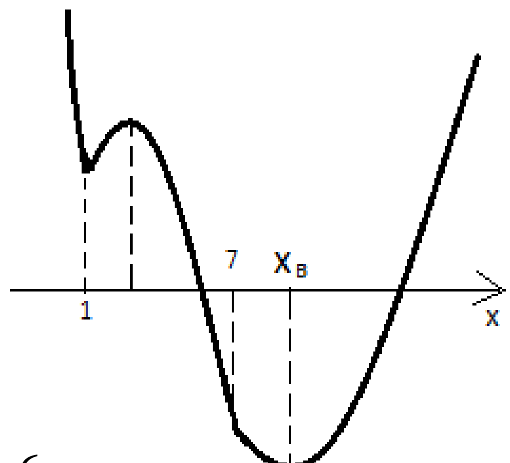
$$x_в = 4 - 2a$$

1 сл. $x_в \in (-\infty; 1]$



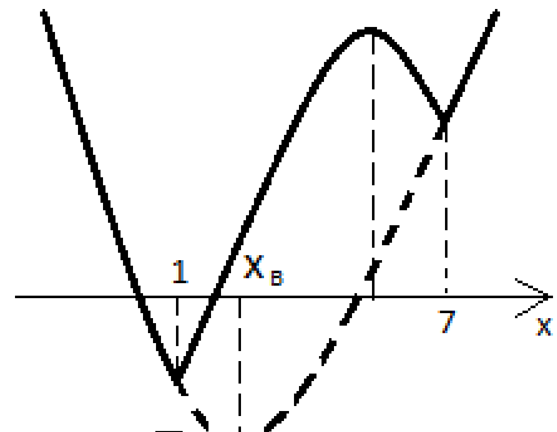
$$\begin{cases} x_в \le 1 \\ f(x_в) < 1 \end{cases}$$

2 сл. $x_в \in [7; \infty)$



$$\begin{cases} x_в \ge 7 \\ f(x_в) < 1 \end{cases}$$

3 сл. $x_в \in (1; 7)$



$$\begin{cases} 1 < x_в < 7, \text{ не зависит} \\ \left[\begin{array}{l} f(1) < 1 \\ f(7) < 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

При каких значениях *a* наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + \left|x^2 - 8x + 7\right|$ меньше единицы?

$$x_в = 4 - 2a$$

1 сл. и 2 сл. $x_в \in (-\infty; 1] \cup [7; \infty)$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4 - 2a \le 1 \\ 4 - 2a \ge 7, \end{array}\right. \\ (4-2a)^2 - 2(4-2a)^2 + 7 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge 1{,}5 \\ a \le -1{,}5 \end{array}\right. \\ (2a-4)^2 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge 1{,}5 \\ a \le -1{,}5 \end{array}\right. \\ |2a-4| > \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a > \frac{4+\sqrt{6}}{2}.$$

3 сл. $\left[\begin{array}{l} f(1) < 1 \\ f(7) < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a + 1 - 8 + 7 < 1 \\ 28a + 49 - 56 + 7 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 1/4 \\ a < 1/28 \end{array}\right. \Leftrightarrow a < 1/4.$$

Ответ: $a \in (-\infty; 0{,}25) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}; \infty\right).$

При каких значениях ***a*** система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+6|x|+7=5y+6x^2+4a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

$(0;1)$ и $(0;-1)$ 1) $a=1{,}75$ 2) $a=4{,}25$ $x\in(0;1]$, т.е. $x>0$

1) $5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+17$

$5y=5\cdot 2^x+6(x-x^2)-10$

$y=2^x+1{,}2(x-x^2)-2$

$(1;0)$ $(-1;0)$

2) $5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+7$

$5y=5\cdot 2^x+6(x-x^2)$

$y=2^x+1{,}2(x-x^2)$

$x\in(0;1]\Rightarrow x^2\le x\Rightarrow y>1$

Ответ: 1,75.

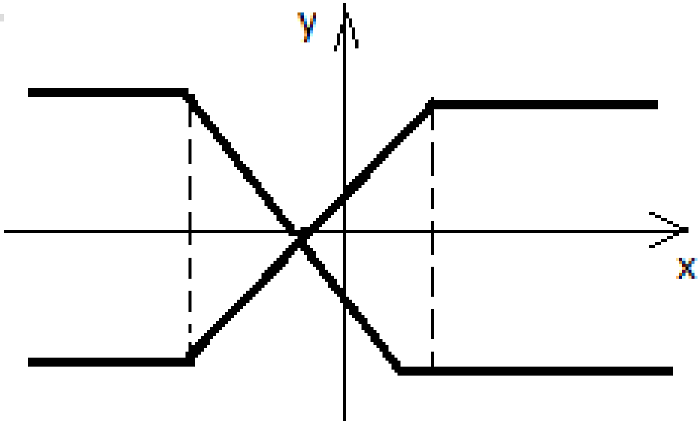
При каких значениях ***a***, уравнение

$$\left(|x-6|-|x-a|\right)^2+2a^2+a-1=3a\left(|x-6|-|x-a|\right)$$

имеет ровно два корня?

$$|x-6|-|x-a|=t$$

$$f(x)=t$$



$$t^2-3at+2a^2+a-1=0$$

$$t_1=2a-1;\quad t_2=a+1$$

$$\left[\begin{array}{l}|x-6|-|x-a|=t_1,\\ |x-6|-|x-a|=t_2\end{array}\right.$$

$$f(x)=|x-6|-|x-a|$$

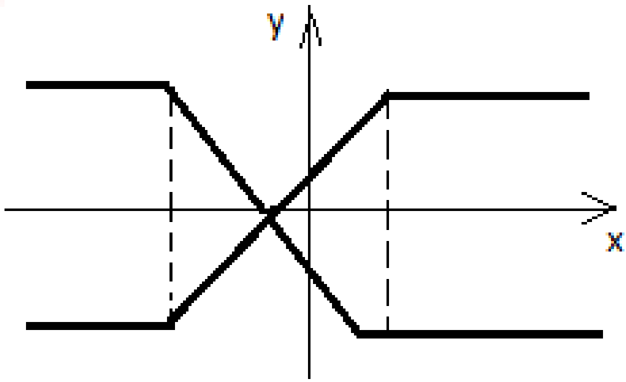
$$f(x)=t_1\qquad f(x)=t_2$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<6,\\ x<a\end{cases}\Rightarrow f(x)=6-a\\ \begin{cases}x>6,\\ x>a\end{cases}\Rightarrow f(x)=a-6\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=|a-6|$$

Продолжение

$f(x)=t$ (1) $\quad f(x)=|a-6| \qquad t_1=2a-1; \quad t_2=a+1$



$|t|>|a-6| \Rightarrow$ реш. нет

$|t|=|a-6| \Rightarrow$ беск. много

$|t|<|a-6| \Rightarrow 2$ решения

тогда

$$\begin{cases}|t_1|<|a-6|,\\ |t_2|<|a-6|\end{cases}$$

$$\begin{cases}|a+1|<|a-6|,\\ |2a-1|<|a-6|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)^2-(a-6)^2<0,\\ (2a-1)^2-(a-6)^2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7(2a-5)<0,\\ (a+5)(3a-7)<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a<2{,}5,\\ -5<a<2\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-5;\,2\frac{1}{3}\right).$$

При $a=6 \quad f(x)=0, \quad t_1=11, \ t_2=7$ не удовлетворяет ур. (1)

При $t_1=t_2 \Leftrightarrow 2a-1=a+1 \Leftrightarrow a=2.$

Ответ: $a\in(-5;\,2)\cup\left(2;\,2\frac{1}{3}\right).$

Задания для самостоятельного решения

1. $|x-2|+3|x-a|>4+2x,$

2. $3|x-4|+2|x+a|\le\sqrt{25-y^2}+2,$

3. $x^2+6x=2|x-a|-9,$

4. $\begin{cases}(x-6)^2+(y-5)^2=9,\\ y=|x-a|+2.\end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

5. $9a+\sqrt{-7+8x-x^2}=ax+3,$

6. $f(x)=2ax+\left|x^2-8x+12\right|,$

7. $\begin{cases} 2^{|x|+2}+3|x|+5=4y+3x^2+2a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

8. $\left(|x-8|-|x-a|\right)^2+10a^2+6a-4=7a\left(|x-8|-|x-a|\right).$