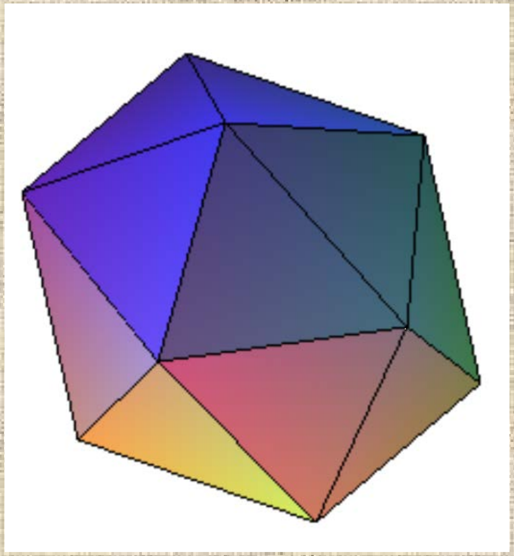
Многогранники. Пирамида



Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Понятие многогранника

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Показать многогранники

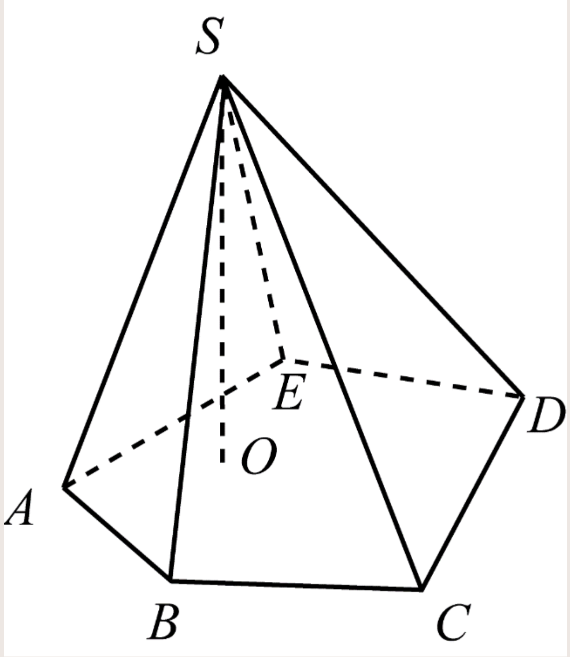
Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности.

Общая часть такой плоскости и поверхности многогранника называется *гранью*. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками.

Стороны граней называется *ребрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника*.

Определение пирамиды

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания, – *вершины пирамиды*, и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



Пирамида

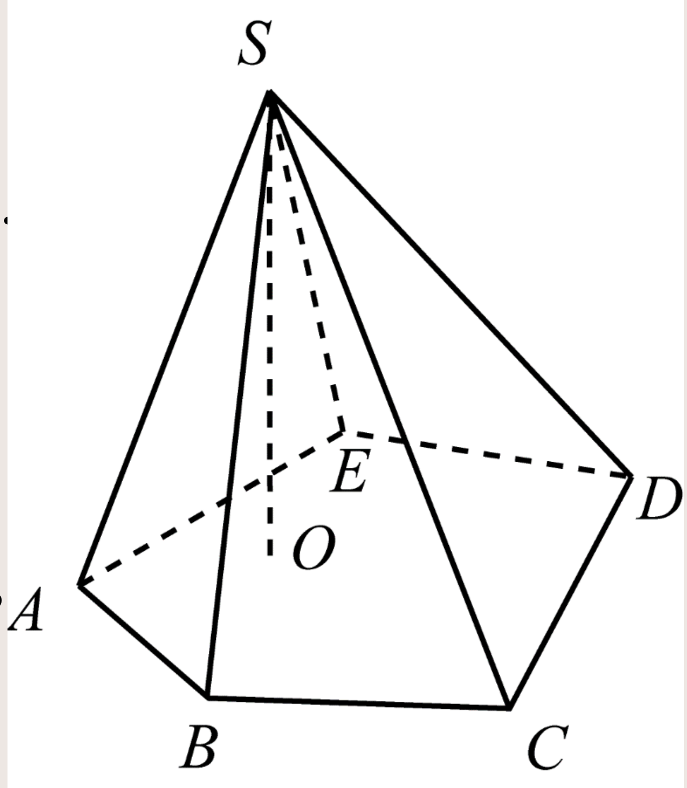
Пирамида называется *n-угольной*, если в ее основании лежит n-угольник.

Элементы пирамиды

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами оснований, называются *боковыми ребрами пирамиды.*

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания (SO).

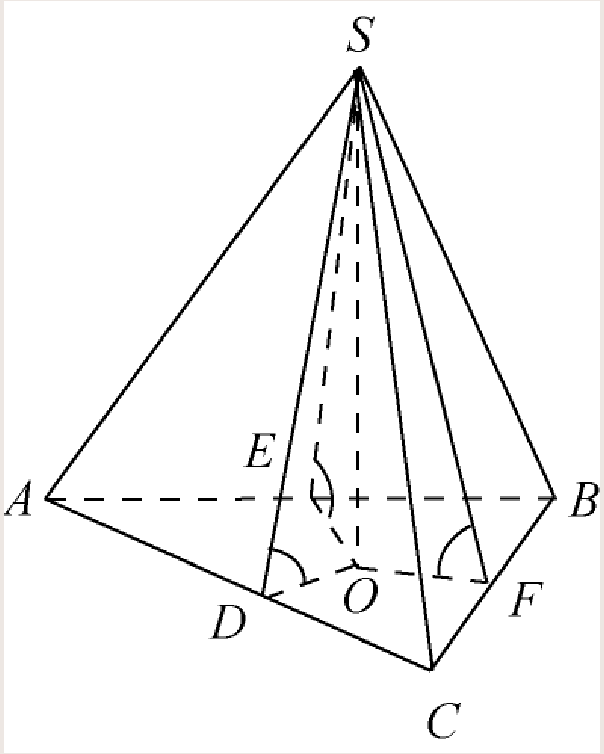
Высота боковой грани пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*.



Свойства пирамиды

Теорема. Если в пирамиде все высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды равны, то

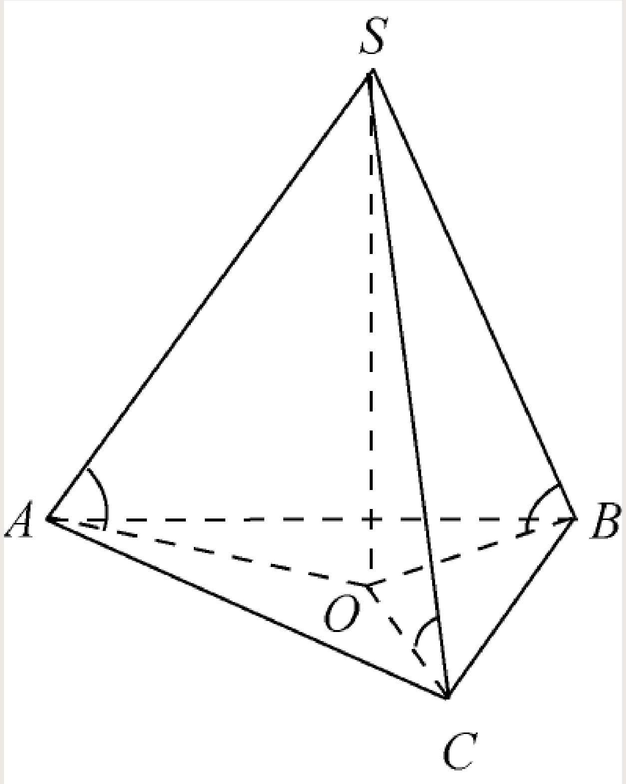
1. все боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами;
2. вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание.



Свойства пирамиды

<u>Теорема</u>. Если в пирамиде все боковые ребра равны, то

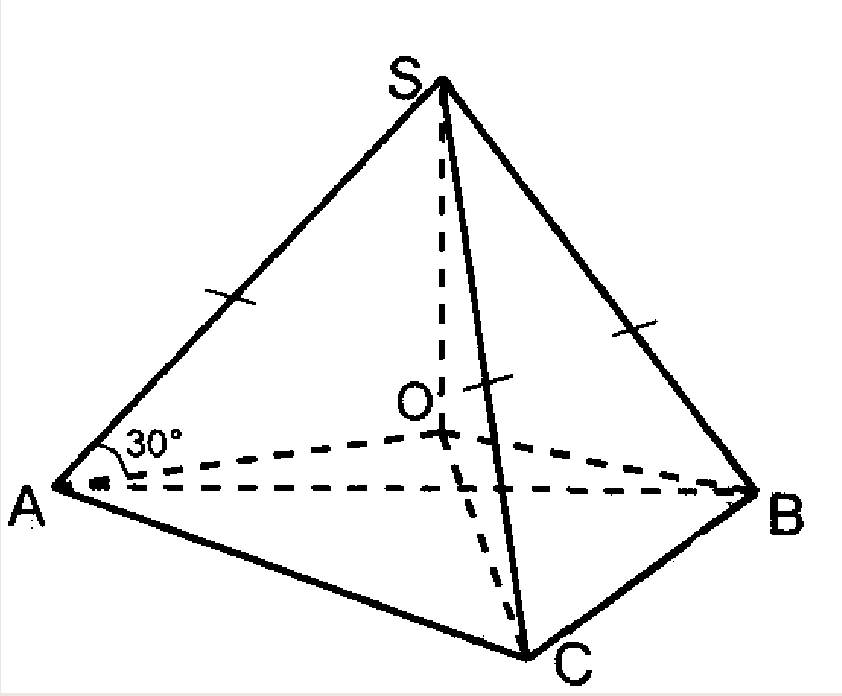
1. все боковые ребра наклонены к плоскости основания под равными углами;
2. вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания.



Верны и обратные утверждения.

Задача 3

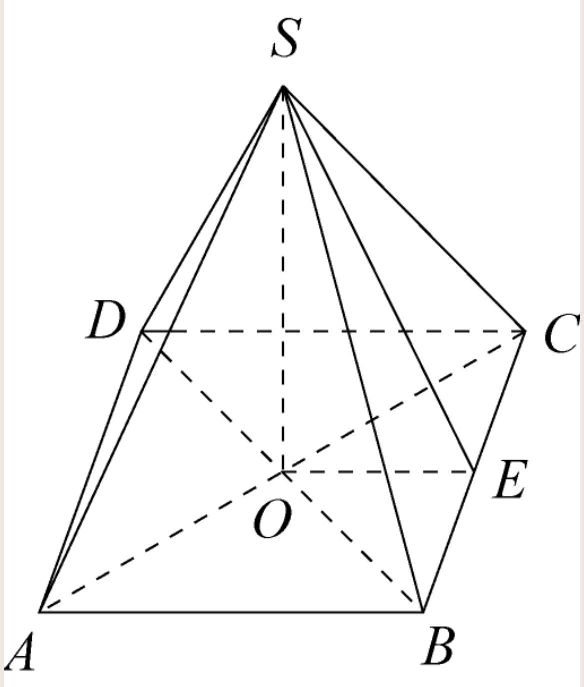
Найти высоту *SO* пирамиды, изображенной на рисунке, если $AB = 5\sqrt{3}$, $\angle ACB = 150^\circ$.



Ответ: 5.

Правильная пирамида

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник и основание высоты совпадает с его центром.

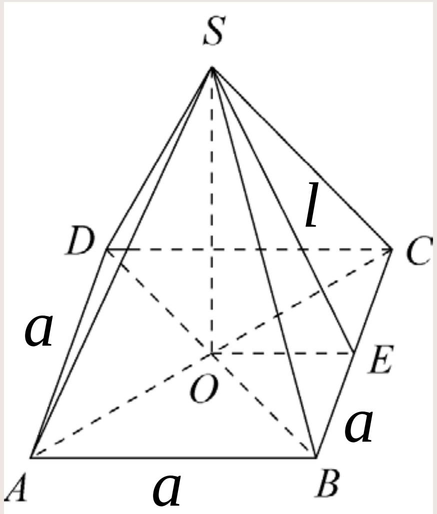


Ее боковые ребра равны, и все ее боковые грани – равнобедренные треугольники.

Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.

Боковая поверхность правильной пирамиды

<u>Теорема</u>. Боковая поверхность пирамиды с равными апофемами равна произведению полупериметра основания на апофему.



Доказательство. Боковые грани пирамиды – треугольники с основаниями a_i и высотами l.

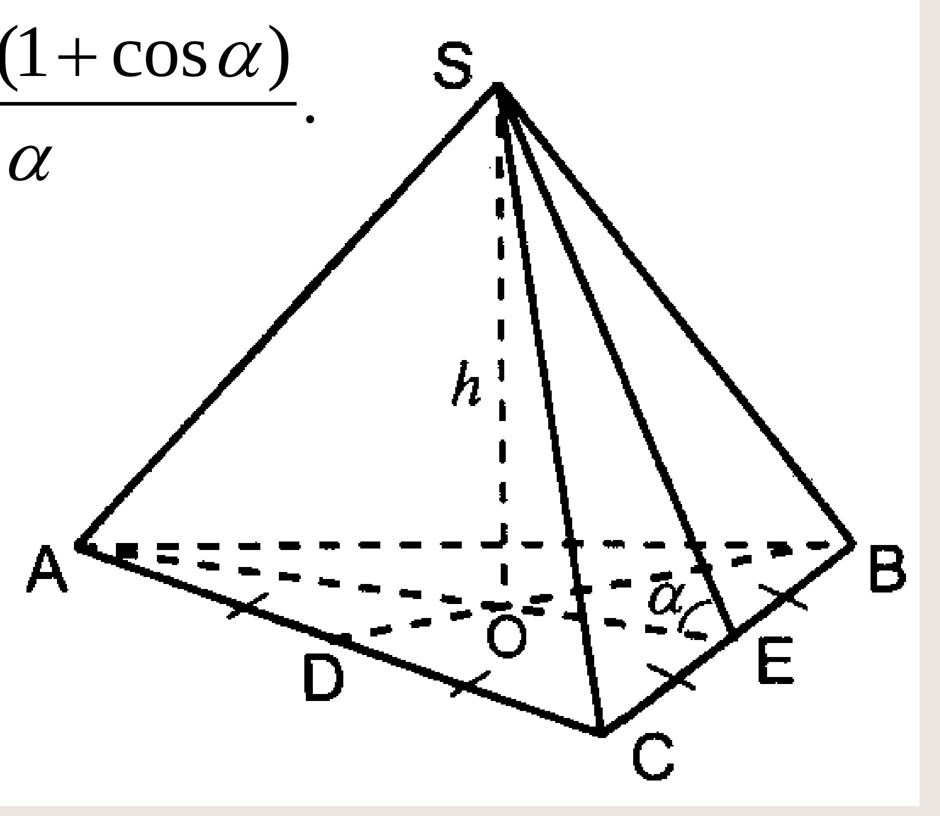
Тогда по определению площадь боковой поверхности:

$$S_б = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i l}{2} = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i = lp.$$

Задача 4

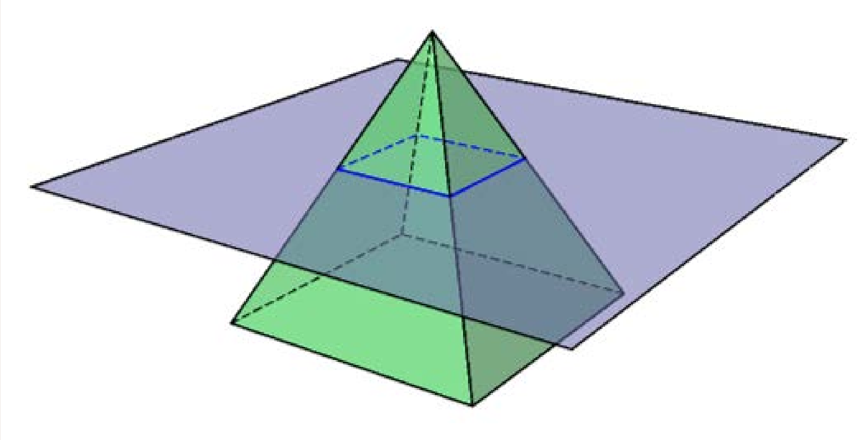
Найти площадь полной поверхности правильной пирамиды, изображенной на рисунке, если *SO=h* – высота.

$$\text{Ответ}: \frac{3\sqrt{3}h^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$



Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на *отсеченную пирамиду* и *усеченную пирамиду*.



Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками, а боковые грани представляют собой трапеции.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает подобную пирамиду.

Задача 5

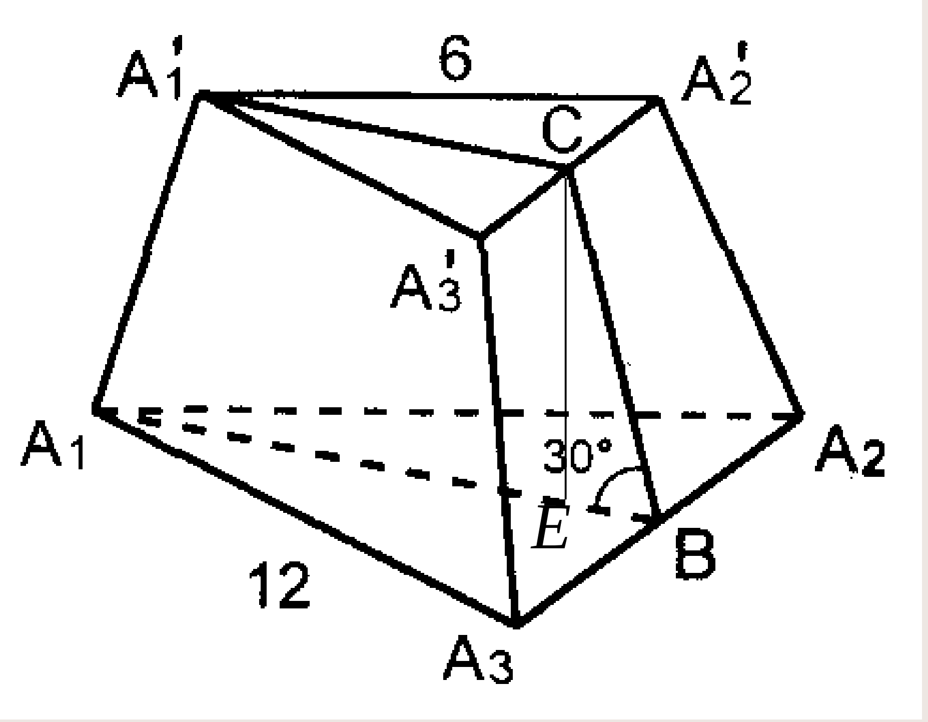
Найти площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, изображенной на рисунке, если *SO*=*h* – высота.

$$BE = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2,$$

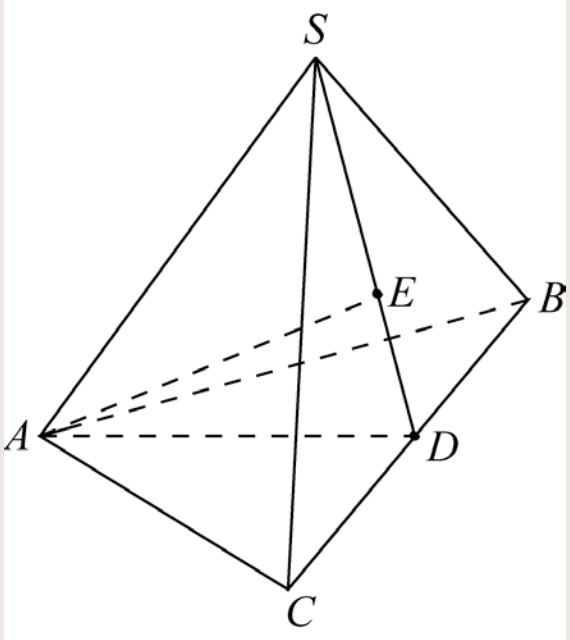
$$S_б = 3 \cdot \frac{6+12}{2} BC = 54,$$

$$\text{Ответ}: 54.$$



Задача 6

Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из вершины основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ на боковую грань SBC, лежит на высоте SD этой боковой грани.



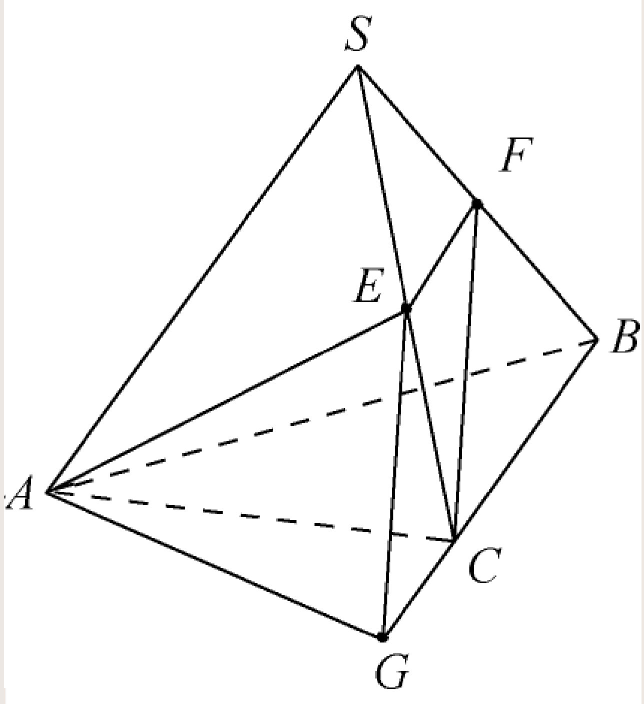
Построим $AE \perp SD$

$$\left.\begin{array}{l} AD \perp BC \\ SD \perp BC \end{array}\right\| \overset{\text{Т 7.1}}{\Rightarrow} ASD \perp BC \Rightarrow AE \perp BC$$

$$\left.\begin{array}{l} AE \perp BC \\ AE \perp SD \end{array}\right\| \overset{\text{Т 7.1}}{\Rightarrow} AE \perp SBC$$

Задача 7

В треугольной пирамиде все ребра равны. Найти угол между скрещивающимися медианами двух соседних граней.



Построим $EG \parallel FC,\ EG \in SBC,$

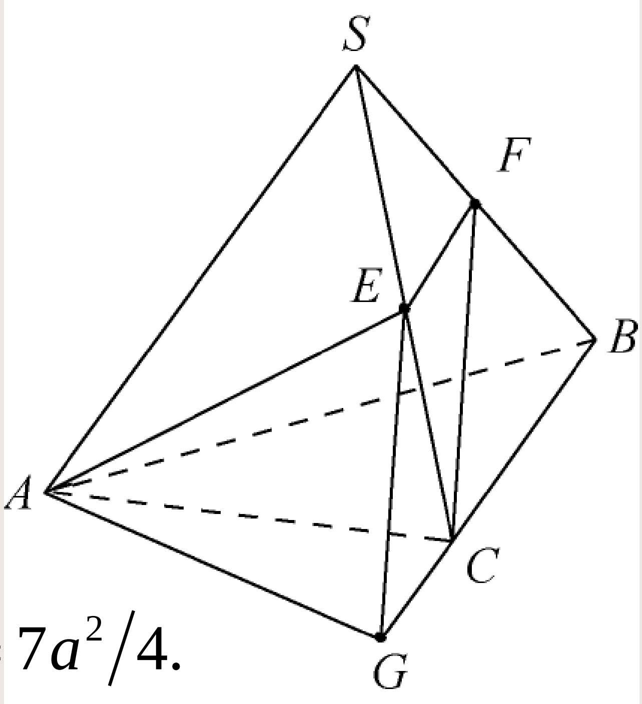
тогда $\angle AEG$ - искомый

Построим $CG \parallel EF,\ CG \in BC \Rightarrow$

$\Rightarrow EFCG$ - параллелограмм

Определим все стороны треугольника AEG и найдем искомый угол с помощью Т косинусов.

Задача 7



Пусть ребро равно *a*

EF – средняя линия и равна *a*/2

$CF = GE = a\sqrt{3}/2$ как высота $\triangle SBC$

$\triangle ACG$:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 - 2AC \cdot CG \cdot$$

$$\cdot \cos\angle ACG = a^2 + (a/2)^2 - 2a \cdot a/2 \cdot$$

$$\cdot \cos(\pi - \angle ACB) = a^2 + a^2/4 + a^2/2 = 7a^2/4.$$

$\triangle AEG$:

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 - 2AE \cdot EG \cos\angle AEG =$$

$$= 2 \cdot 3a^2/4 - 2 \cdot 3a^2/4 \cos\angle AEG = 7a^2/4 \Rightarrow \cos\angle AEG = -1/6.$$

Список литературы

- Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы. Базовый и профильный уровни. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.
- Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия. – М: «Илекса», 2006. – 80 с.
- Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. http://reshuege.ru/