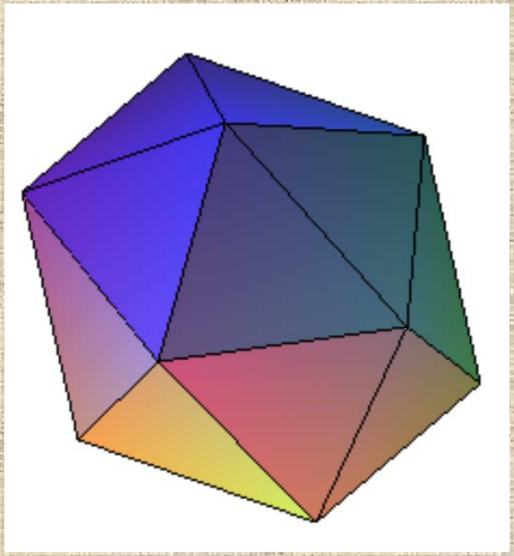
Многогранники. Призма



Шабрыкина Наталья Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Понятие многогранника

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Показать многогранники

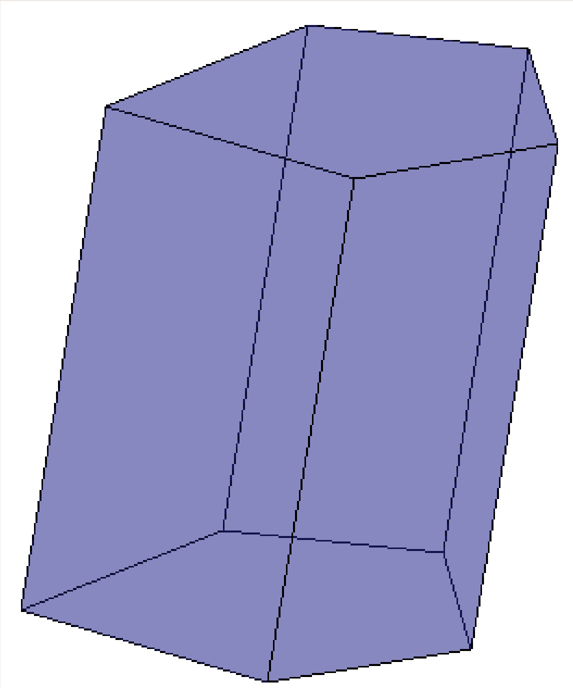
Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности.

Общая часть такой плоскости и поверхности многогранника называется *гранью*. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками.

Стороны граней называется *ребрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника*.

Определение призмы

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.



Призма

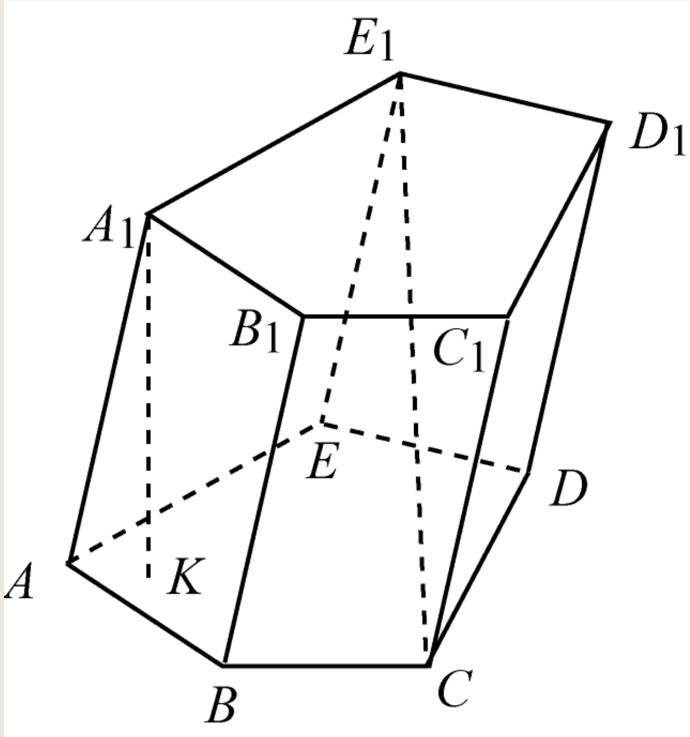
Призма называется *n-угольной*, если в ее основании лежит n-угольник.

Элементы призмы

Многоугольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины многоугольников, – *боковыми ребрами призмы*.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы*.



Свойства призмы

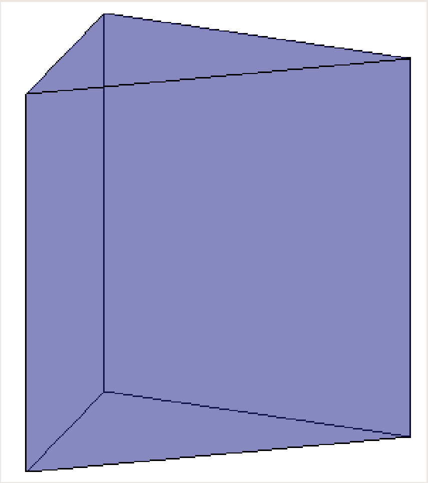
Любая призма обладает следующими свойствами, следующими из того факта, что основания призмы совмещаются параллельным переносом:

1. Основания призмы равны.
2. Боковые ребра призмы параллельны и равны.

Поверхность призмы состоит из оснований и *боковой поверхности*. Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов (это следует из свойств призмы). Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей боковых граней.

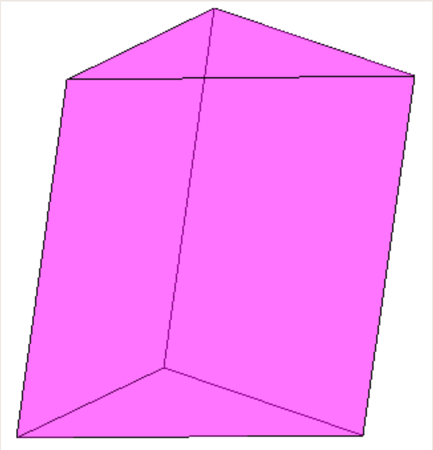
Полной поверхностью призмы называется сумма площади боковой поверхности и площадей оснований.

Прямая призма



Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Гранями прямой призмы являются прямоугольники. Высота прямой призмы равна ее боковым граням.



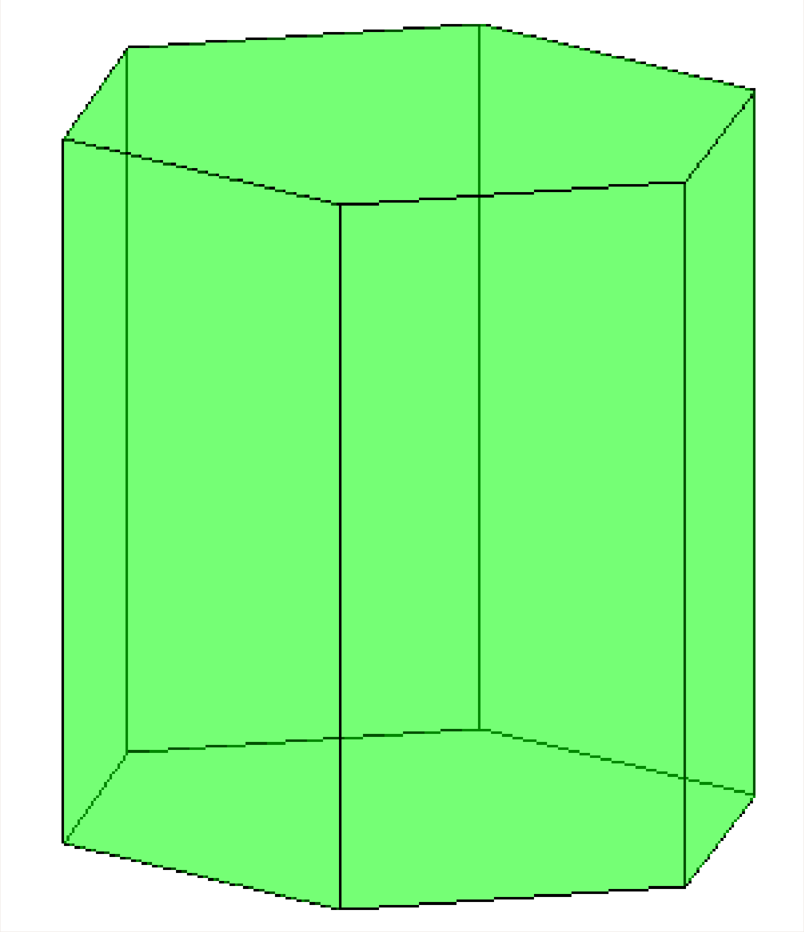
Отличная от прямой призма называется *наклонной*.

Боковыми гранями наклонной призмы являются параллелограммы

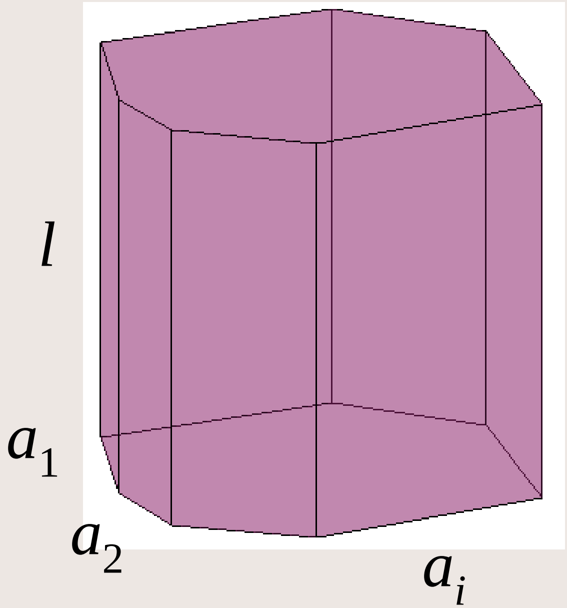
Правильная призма

Правильной призмой называется прямая призма с правильным многоугольником в основании.

Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.



Боковая поверхность прямой призмы



Теорема. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра на высоту призмы.

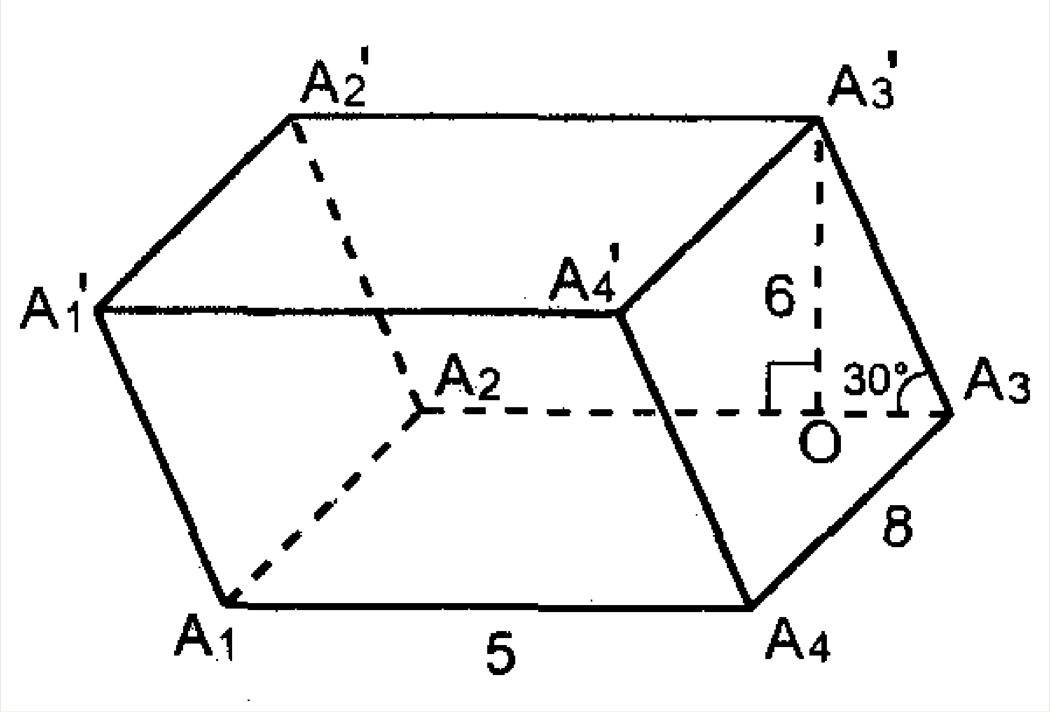
Доказательство. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники со сторонами a_i и l.

Тогда по определению площадь боковой поверхности:

$$S_б = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} a_i l = l \sum_{i=1}^{n} a_i = lP.$$

Задача 1

Найти площадь боковой поверхности призмы, изображенной на рисунке, если в ее основании лежит прямоугольник, а A_3O - высота призмы.

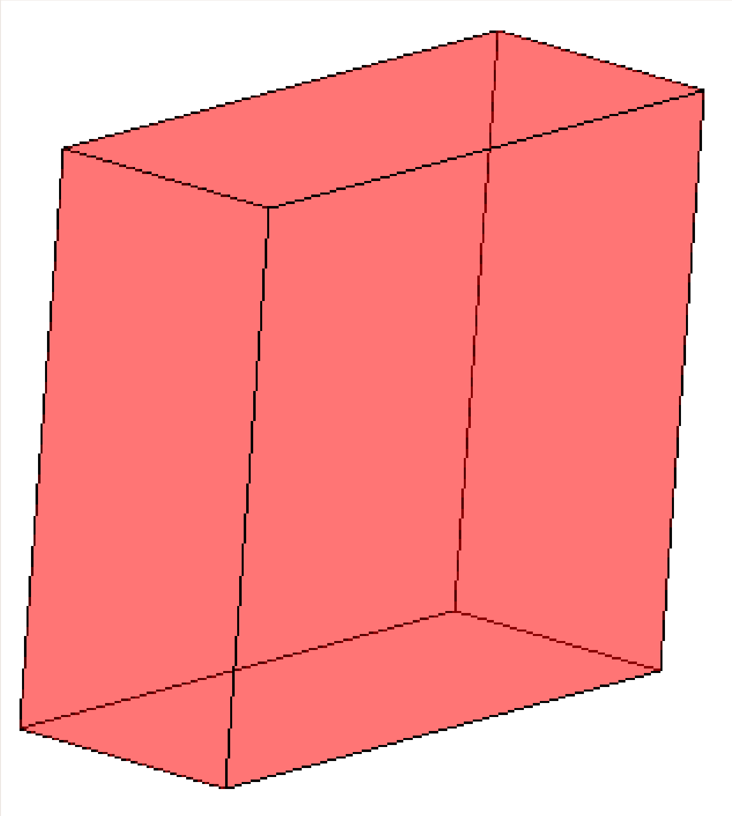


Ответ: 252.

Параллелепипед

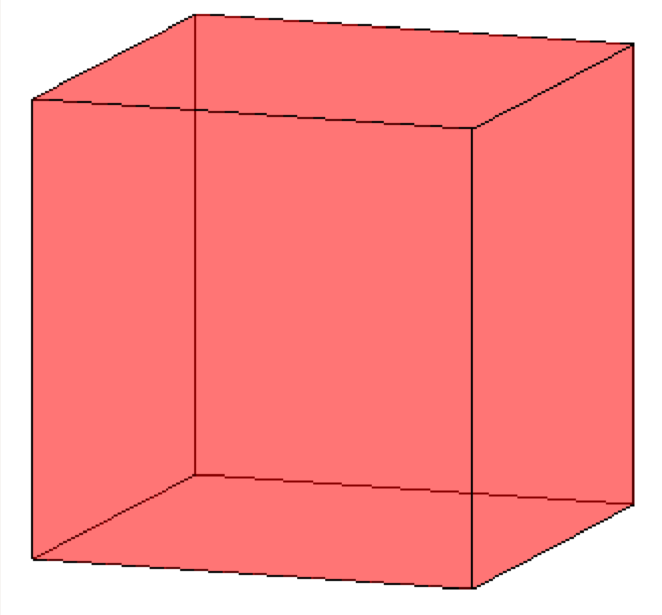
Если в основаниях призмы лежат параллелограммы, то она называется *параллелепипедом*.

У параллелепипеда все грани – параллелограммы. При этом противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.



Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

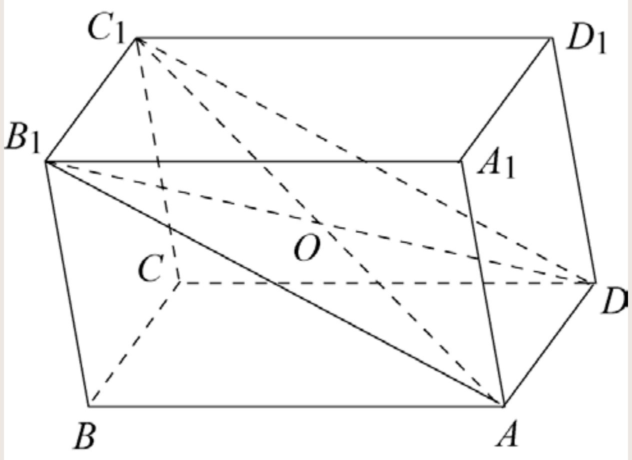


У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются измерениями.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*.

Свойства параллелепипеда

Теорема. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.



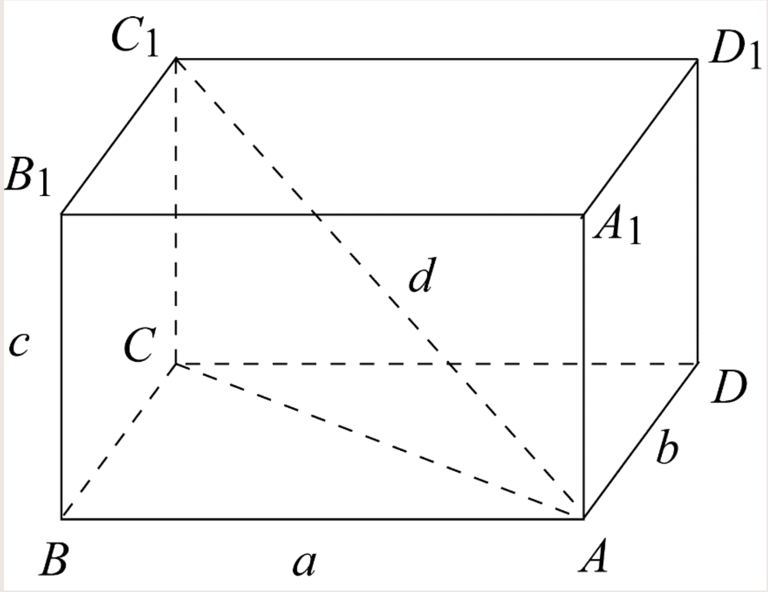
Доказательство. Рассмотрим диагонали DB_1 и AC_1.

$$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 \parallel BC \\ AD \parallel BC \end{array}\right\| \Rightarrow B_1C_1 \parallel AD, \quad \left.\begin{array}{l} B_1C_1AD \cap ABA_1B_1 \\ B_1C_1AD \cap DCC_1D_1 \\ ABA_1B_1 \parallel DCC_1D_1 \end{array}\right\| \Rightarrow AB_1 \parallel DC_1.$$

Значит AB_1C_1D – параллелограмм и его диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Свойства параллелепипеда

Теорема. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений:



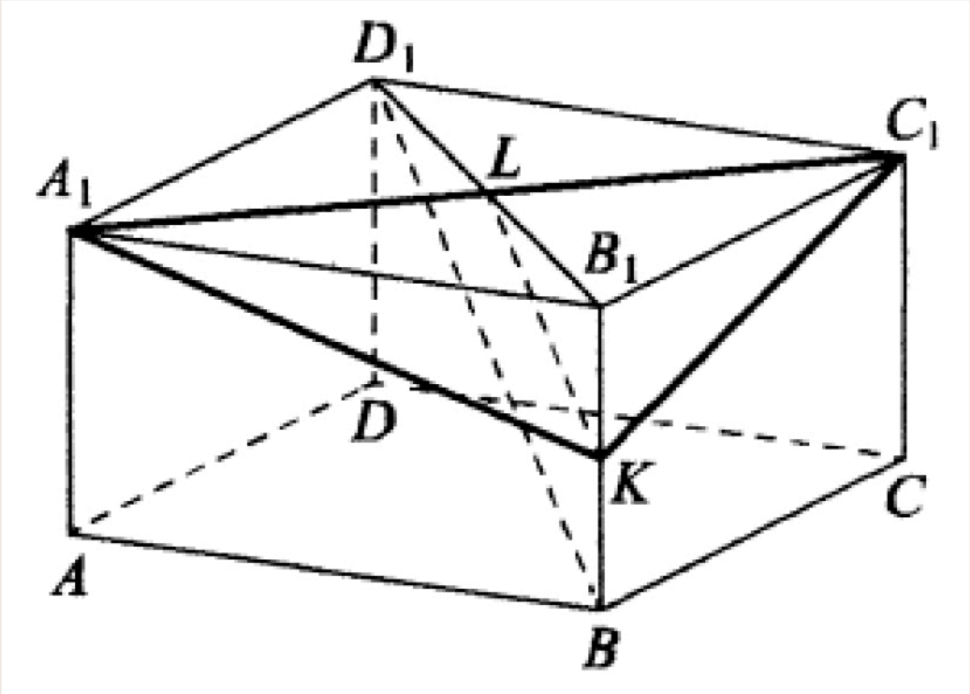
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Для доказательства следует применить теорему Пифагора для прямоугольных треугольников ABC и ACC_1.

Задача 2

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость, параллельная прямой BD_1. Докажите, что сечение призмы данной плоскостью является равнобедренным треугольником. Найдите периметр этого треугольника.

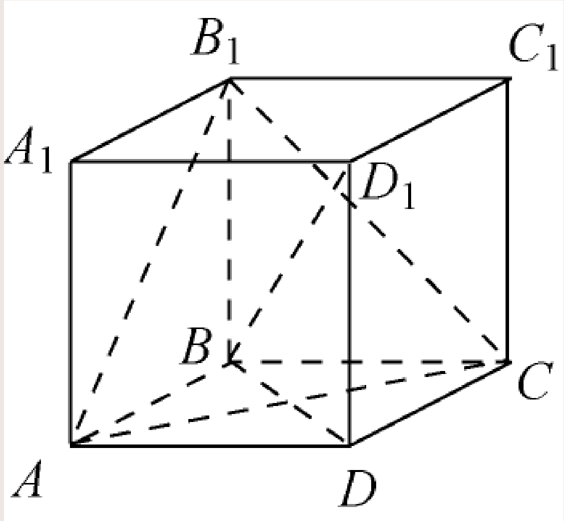
Задача 2



Ответ: 26.

Задача

Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C.



$$\left.\begin{array}{l} BD - \text{проекция } BD_1 \\ BD \perp AC \end{array}\right\| \overset{\text{Т 8.1}}{\Rightarrow} BD_1 \perp AC$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1B - \text{проекция } BD_1 \\ A_1B \perp AB_1 \end{array}\right\| \overset{\text{Т 8.1}}{\Rightarrow} BD_1 \perp AB_1$$

$$\left.\begin{array}{l} BD_1 \perp AC \\ BD_1 \perp AB_1 \\ AC, AB_1 \in AB_1C \end{array}\right\| \overset{\text{Т 7.1}}{\Rightarrow} BD_1 \perp AB_1C$$

Задача

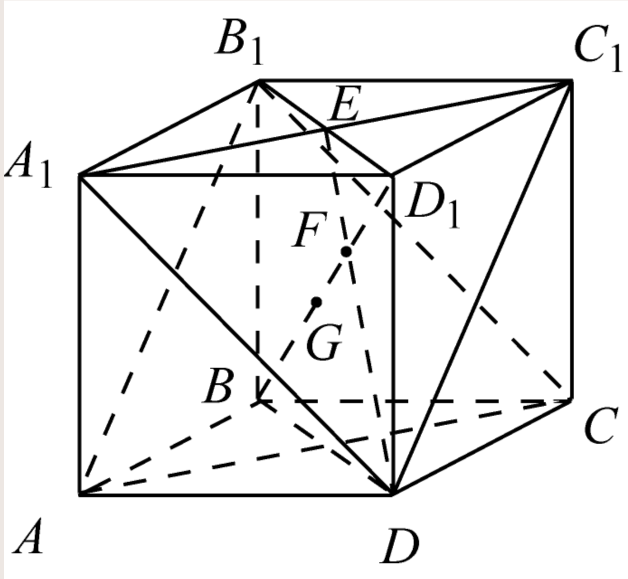
Найдем $FD_1 = BG$:

$$ED_1 \parallel BD \Rightarrow \triangle ED_1F \sim \triangle BFD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BF : FD_1 = BD : ED_1 = 2 \Rightarrow$$

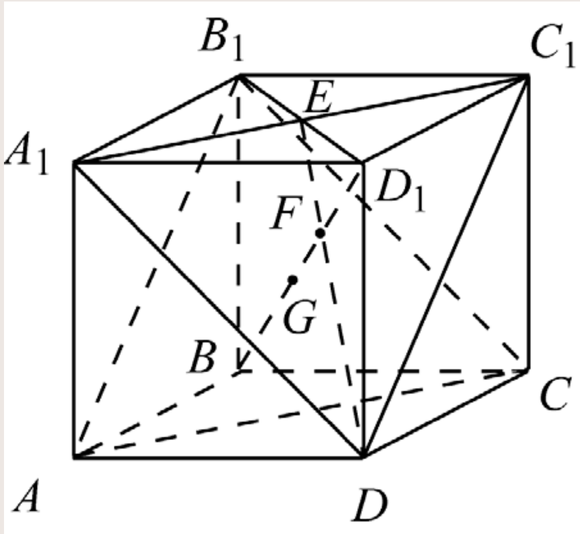
$$\Rightarrow FD_1 = BG = BD_1/3 \Rightarrow$$

$$GF = BD_1 - BG - FD_1 = BD_1/3 = a\sqrt{3}/3.$$



Задача

Грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a . Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями DC_1 и CB_1 граней куба.



$$\left.\begin{array}{l} BD_1 \perp AB_1C \\ BD_1 \perp A_1C_1D \end{array}\right\| \overset{\text{Т 7.6}}{\Rightarrow} AB_1C \parallel A_1C_1D$$

Расстояние между DC_1 и CB_1 равно расстоянию между этими плоскостями.

$$F = BD_1 \cap A_1C_1D: \quad \begin{array}{l} E = B_1D_1 \cap A_1C_1 \\ F = DE \cap BD_1 \end{array}$$

Аналогично $G = BD_1 \cap AB_1C$

Список литературы

- Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы. Базовый и профильный уровни. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.
- Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия. – М: «Илекса», 2006. – 80 с.
- Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. http://reshuege.ru/