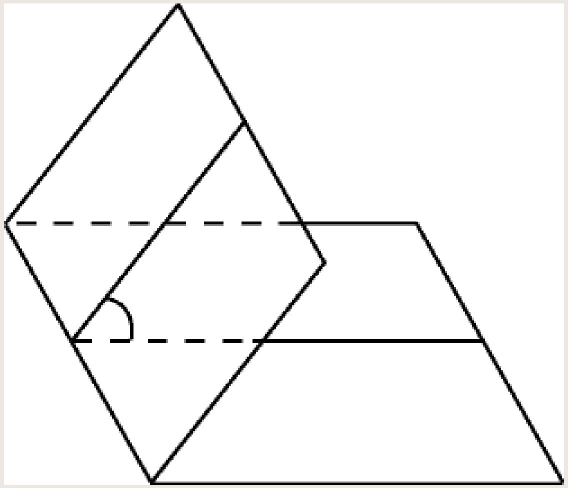
Многогранные углы

Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ

Определение

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.

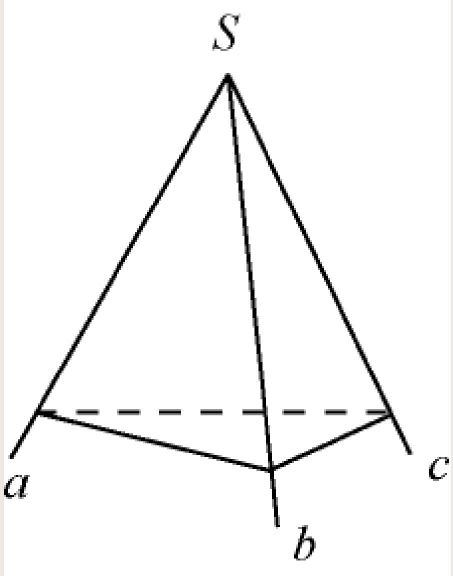


Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая – *ребром* двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется линейным углом двугранного угла.

Определение

Рассмотрим три луча *a*, *b*, *c*, исходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости.



Трехгранным углом называется фигура, составленная из трех плоских углов (*ab*), (*bc*) и (*ac*).

Эти углы называются гранями трехгранного угла, а из стороны – ребрами. Общая точка *S* лучей называется вершиной угла.

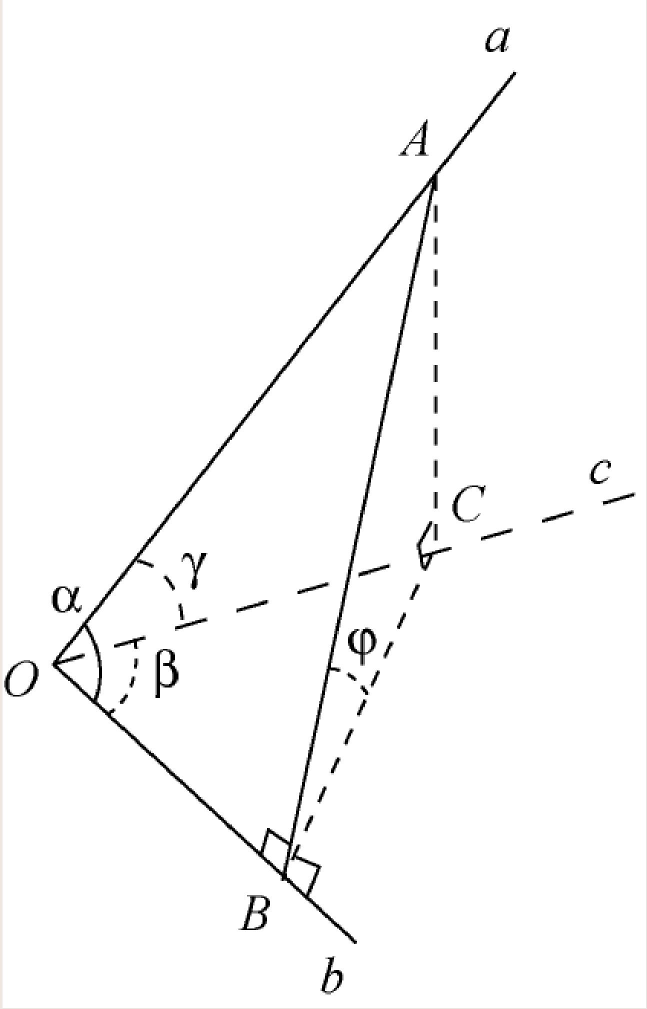
Связь между линейными углами и двугранным углом трехгранного угла

Дано:

Двугранный угол $\varphi = \angle ABC$ и плоский угол $\beta = \angle COB$ (оба острые).

Найти:

Два других плоских угла $\alpha = \angle AOB$ и $\gamma = \angle AOC$



Связь между линейными углами и двугранным углом трехгранного угла

$$\left.\begin{array}{l}\Delta OAB: \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AB}{OB} \\ \Delta ABC: AB = \dfrac{BC}{\cos\varphi} \\ \Delta COB: OB = \dfrac{BC}{\operatorname{tg}\beta}\end{array}\right\| \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\varphi}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AOC: \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{AC}{OC} \\ \Delta ABC: AC = BC\operatorname{tg}\varphi \\ \Delta COB: OC = \dfrac{BC}{\sin\beta}\end{array}\right\| \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\varphi\sin\beta.$$

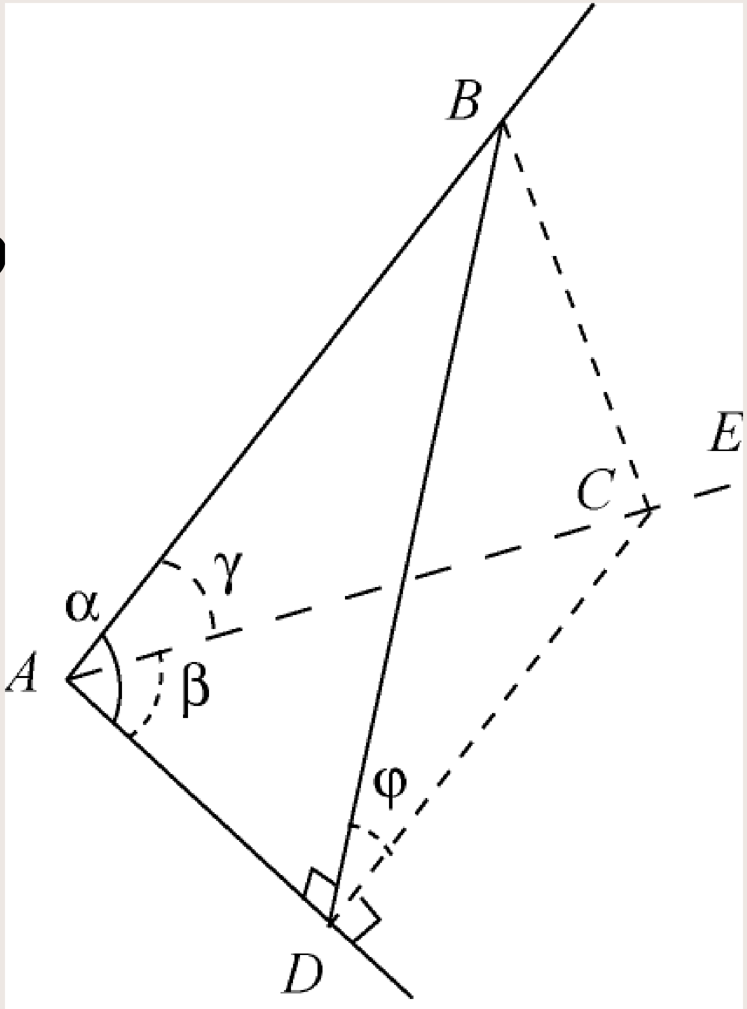
Теорема косинусов для трехгранного угла

Дано:

Плоские углы α, β, γ трехгранного угла *ABCD*

Найти:

Двугранный угол φ при ребре *AD*.



Теорема косинусов для трехгранного угла

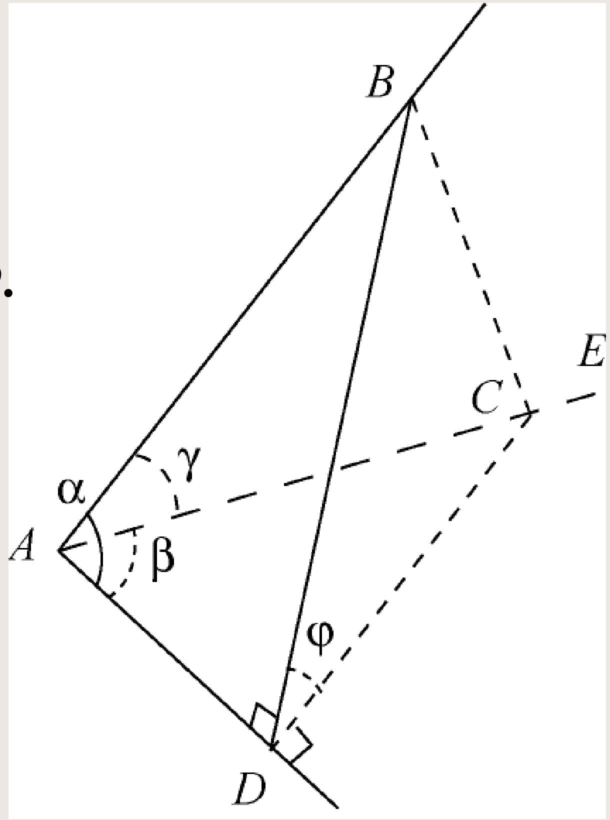
Т косинусов для ABC и BDC :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos\gamma,$$

$$BC^2 = DC^2 + BD^2 - 2BD \cdot DC \cos\varphi.$$

$$0 = \left(AC^2 - DC^2\right) + \left(AB^2 - BD^2\right) -$$

$$-2AC \cdot AB \cos\gamma + 2BD \cdot DC \cos\varphi.$$



$$\Delta ADC: \quad AC^2 - DC^2 = AD^2$$

$$\Delta ADB: \quad AB^2 - BD^2 = AD^2$$

$$AD^2 = AC \cdot AB \cos\gamma - BD \cdot DC \cos\varphi.$$

Теорема косинусов для трехгранного угла

$\triangle ADB:$

$AD = AB\cos\alpha,\ BD = AB\sin\alpha,$

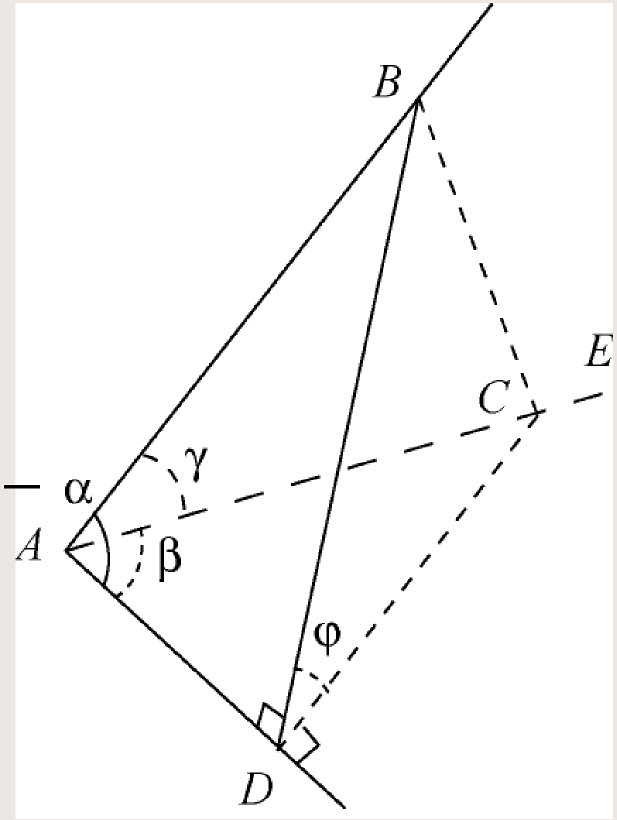
$\triangle ADC:$

$AD = AC\cos\beta,\ DC = AC\sin\beta.$

$$AC\cos\alpha\cdot AB\cos\beta = AC\cdot AB\cos\gamma -$$
$$-AC\sin\alpha\cdot AB\sin\beta\cos\varphi,$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi.$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$



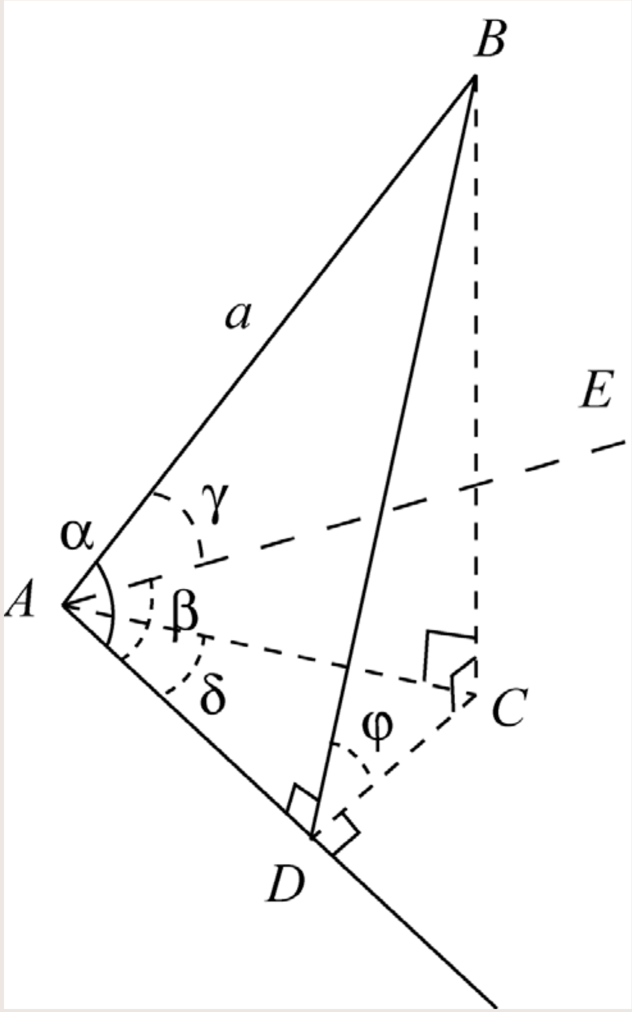
Связь между линейными углами трехгранного угла и углом между ребром и плоскостью двух других ребер

Дано:

Плоские углы α, β, γ трехгранного угла *ABED*.

Найти:

Угол θ между прямой *AB* и плоскостью *ADE*.



Угол между ребром и плоскостью двух других ребер

$$\theta = \angle BAC$$

$$\Delta ABC: \quad \sin\theta = \frac{BC}{AB}$$

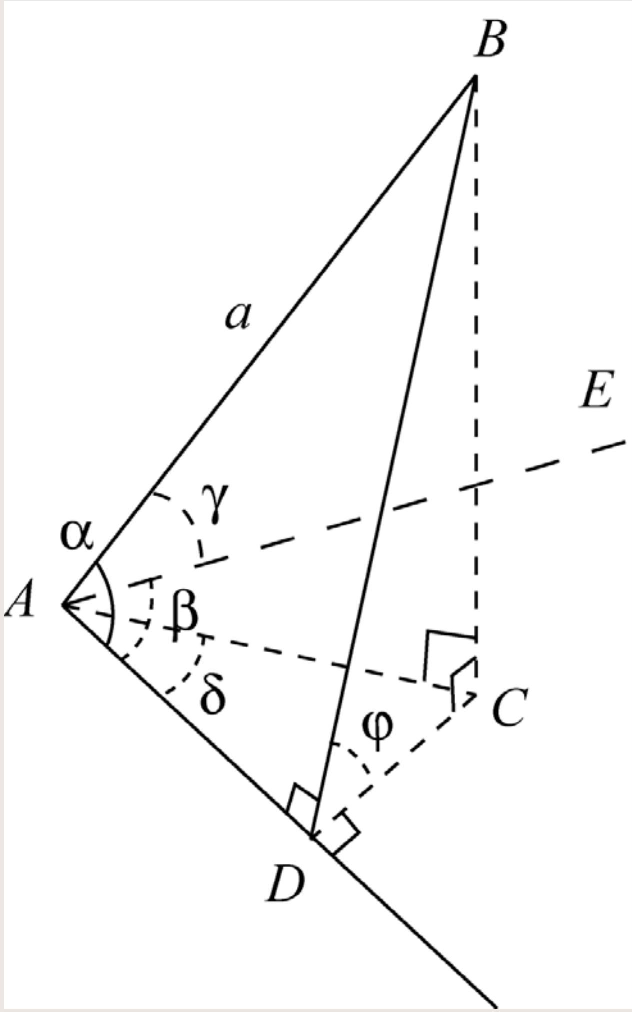
$$\Delta BCD: \quad BC = BD\sin\varphi.$$

$$\Delta ABD:$$

$$BD = AB\sin\alpha = a\sin\alpha,$$

$$AD = AB\cos\alpha = a\cos\alpha.$$

$$\sin\theta = \frac{a\sin\alpha\sin\varphi}{a} = \sin\alpha\sin\varphi.$$



Угол между ребром и плоскостью двух других ребер

$\angle CAD = \delta$

$\Delta BCD:$

$CD = BD\cos\varphi = a\sin\alpha\cos\varphi.$

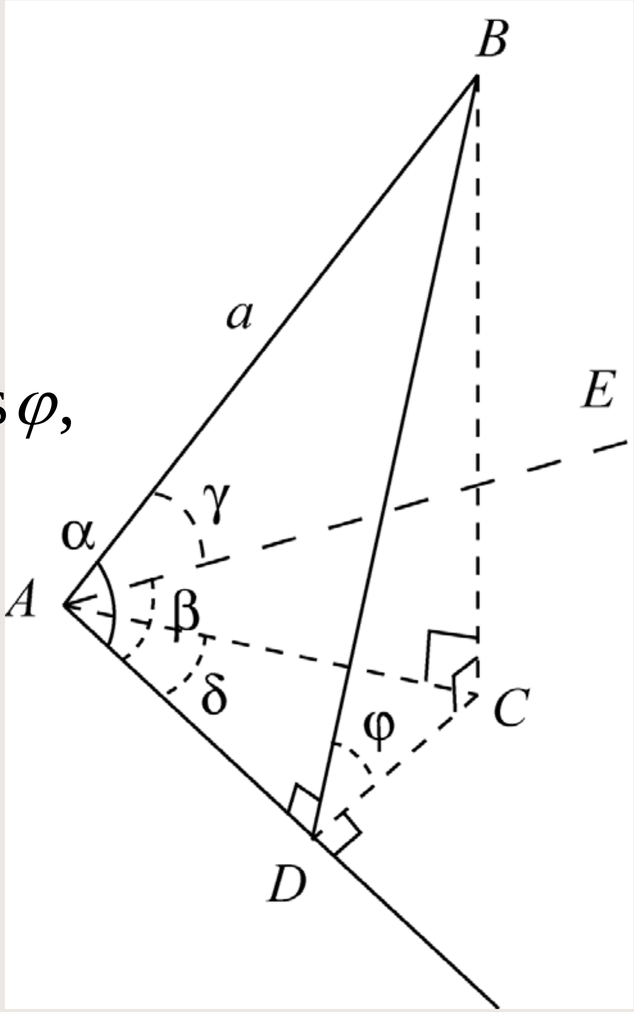
$\Delta ACD:$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{CD}{AD} = \frac{a\sin\alpha\cos\varphi}{a\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi,$$

$$AC = \frac{AD}{\cos\delta} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\delta}.$$

$\Delta ABC:$

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{a\cos\alpha}{a\cos\delta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}.$$



Задачи

- 1. Из точек A и B, лежащих на гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найти а) отрезок AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α; б) двугранный угол α, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$ и $AB = 7$.
- 2. Из точки A вне плоскости проведены на эту плоскость перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC, образующие угол α с перпендикуляром. Найти двугранный угол φ между плоскостями AOB и AOC, если угол между наклонными равен β.

Задачи

- 3. В плоскости одной из граней двугранного угла α проведена прямая, перпендикулярная ребру угла. В плоскости другой грани проведена прямая, образующая угол β с ребром. Найти угол γ между этими прямыми.
- 4. У трехгранного угла один плоский угол равен γ, а прилежащие к нему двугранные углы острые и равны φ. Найти два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла с противолежащим ребром.

Задачи

- 5. У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найти двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.

Список литературы

- Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы. Базовый и профильный уровни. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.
- Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. Геометрия. – М: «Илекса», 2006. – 80 с.