

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный  
исследовательский политехнический университет»

# Анализ временного сигнала и хаотических решений системы Лоренца

Павел Сергеевич Волегов,  
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСР ПНИПУ

Проект «Одаренные дети. Математика»

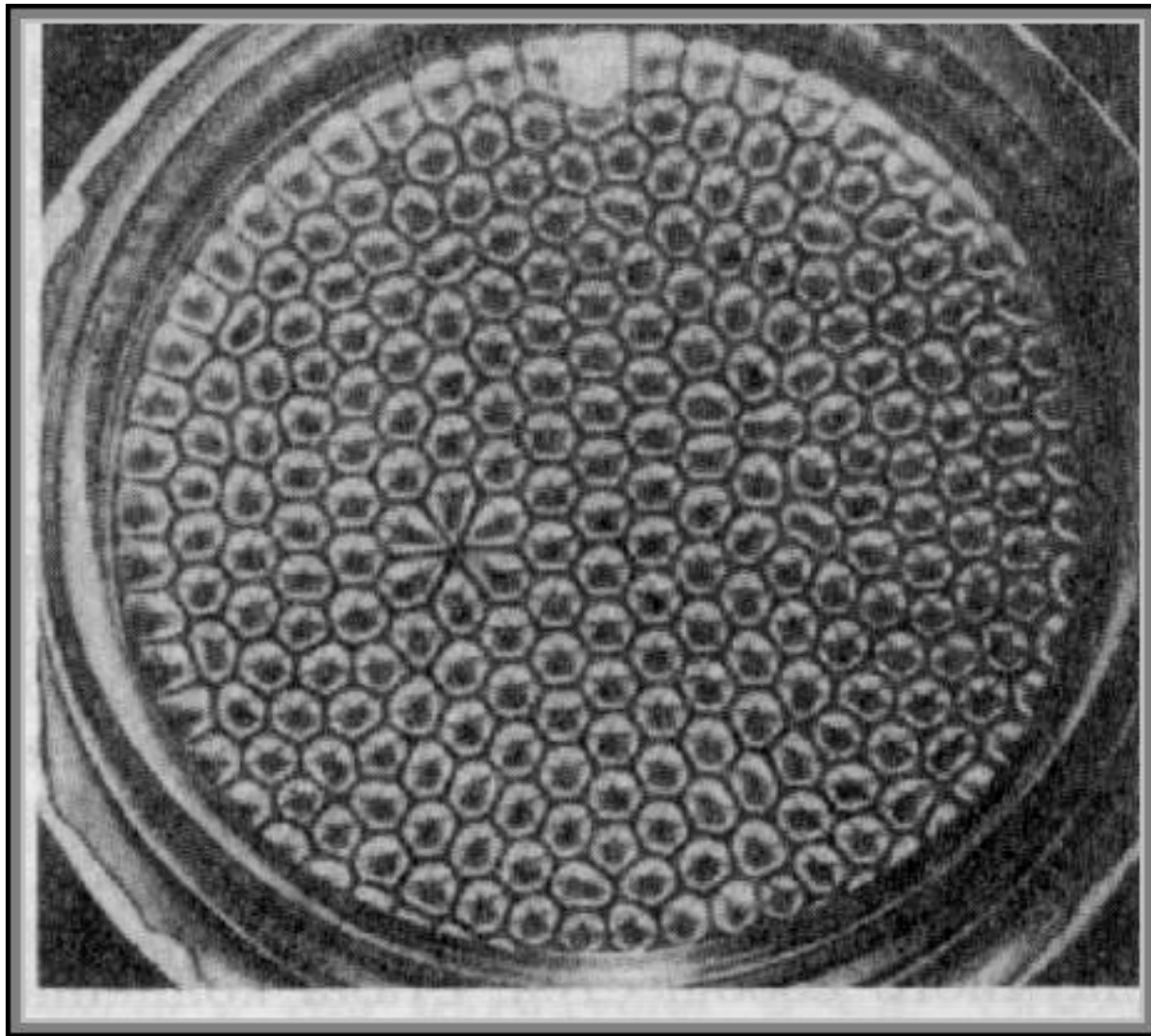


Рис. 1 Ячейки Бенара

# Актуальность

- Турбулентность до сих пор остается не вполне исследованным явлением, что обеспечивает актуальность построения любых математических моделей в этом направлении.

# Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ. \end{cases}$$

- $\sigma = \frac{\nu}{\chi}$  – число Прандтля;
- $b = \frac{4}{(1+a)^2}$  – содержит информацию о геометрии

конвективной ячейки;

- $r = \frac{R}{R_c}$  – внешний управляющий параметр.

# Метод Рунге-Кутты

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right), \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{cases}$$

# Методы обработки результатов

## Фурье-анализ

$$F_n = \left( \sum_{m=1}^N f_m \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^N f_m \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right)^2$$

## Вейвлет-анализ

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t}$$

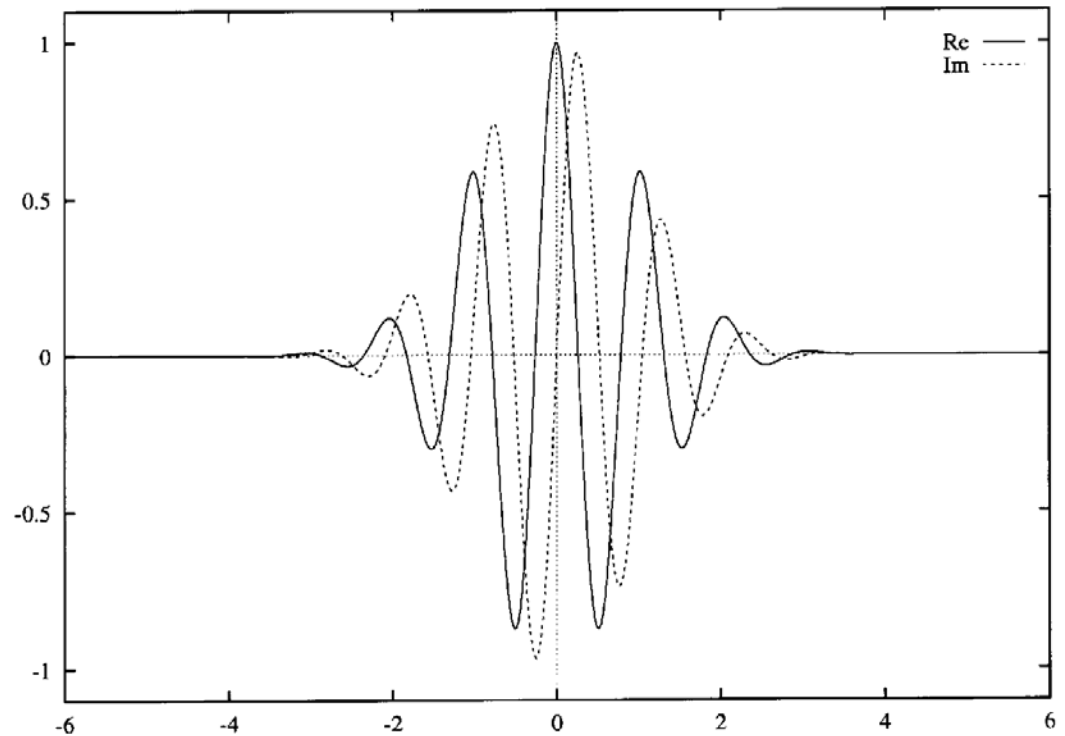


Рис. 2 Вейвлет Морле





Рис.3 Характерный вид спектра при стационарном решении ( $\sigma=12$ ,  $r=25$ ,  $b=0,5$ )

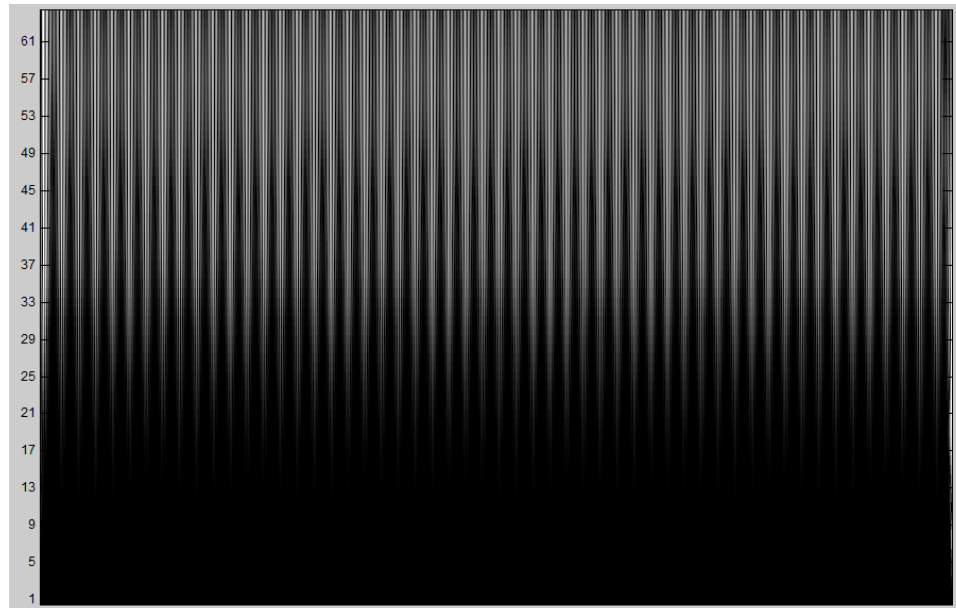


Рис. 4 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=12$ ,  $r=25$ ,  $b=0,5$



Рис. 5 Характерный вид спектра при хаотическом решении ( $\sigma=10$ ,  $r=30$ ,  $b=2,6666$ )

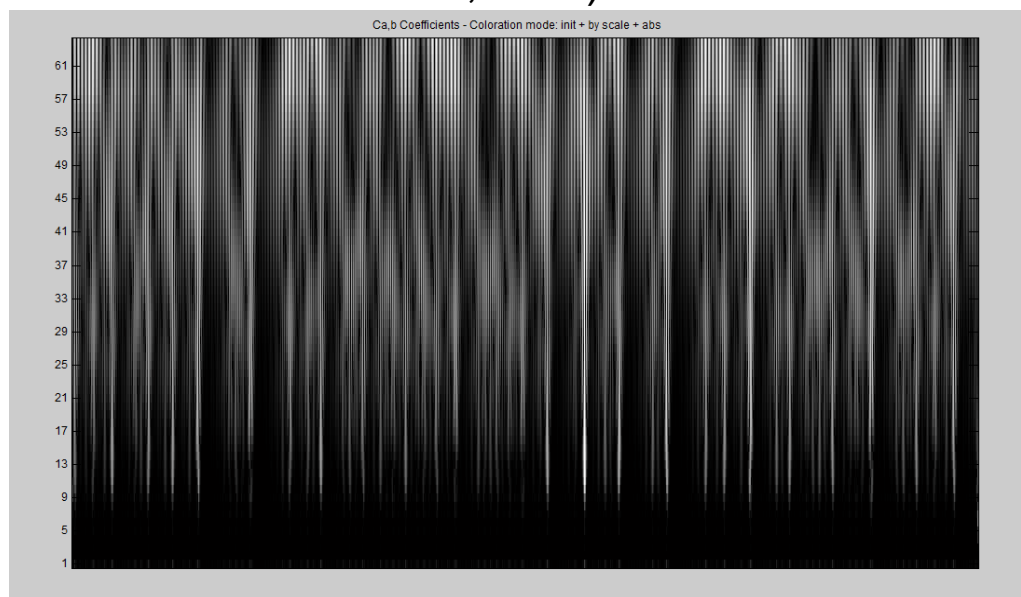


Рис. 6 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=10$ ,  $r=30$ ,  $b=2,6666$





Рис. 7 Характерный вид спектра при квазихаотическом решении ( $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$ )



Рис. 8 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$

# Поиск статистического критерия

- При поиске статистического критерия из множества вариантов спектральных характеристик самыми оптимальными оказались отношение среднего отклонения к среднему значению и отношение максимума к среднему значению.
- Было проведено 300 измерений, и в ручном режиме выявлены промежутки хаотического, квазихаотического и стационарного сигналов.

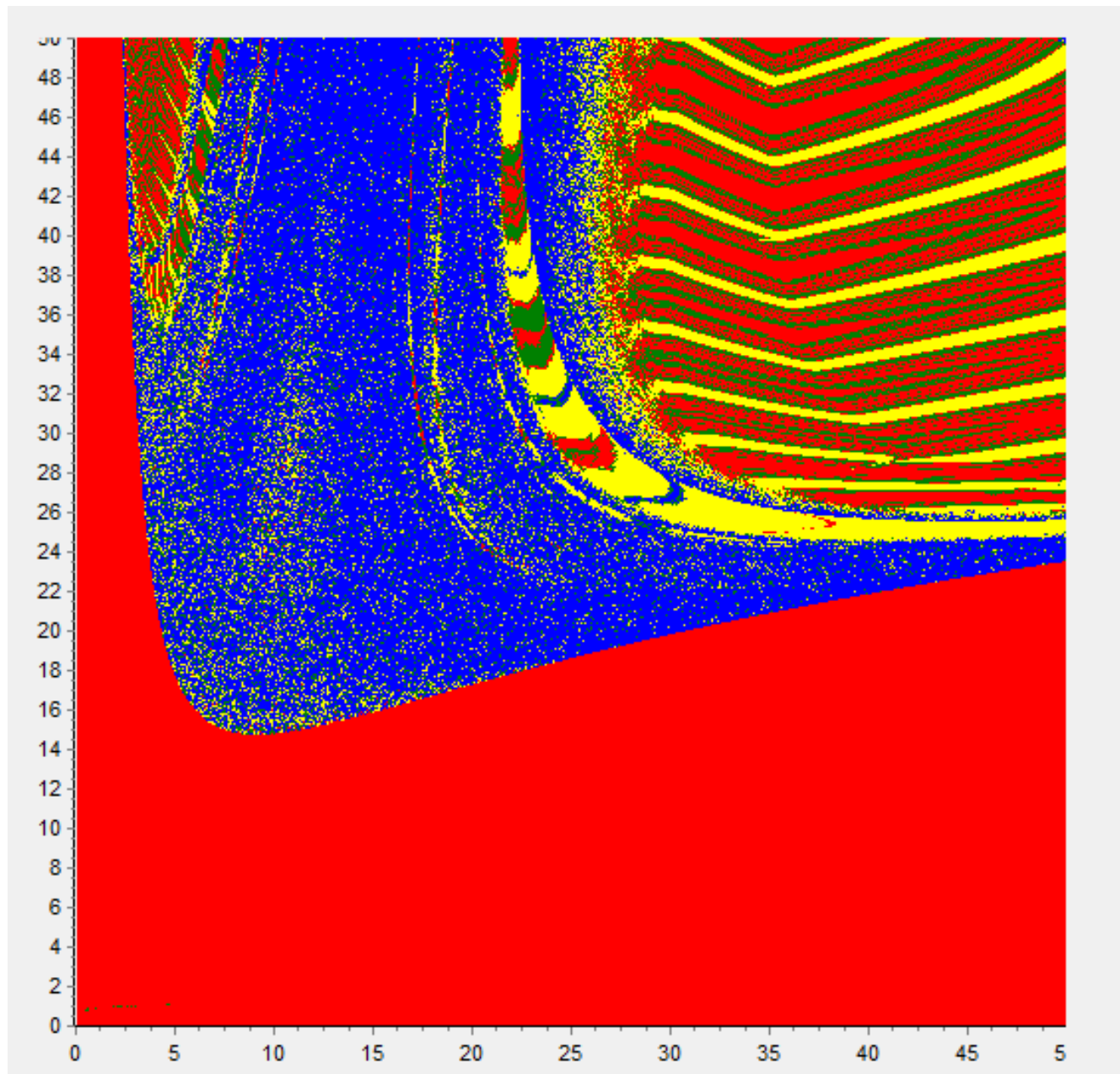


Рис. 9 Цветовая карта для  $b=2,6666$ .



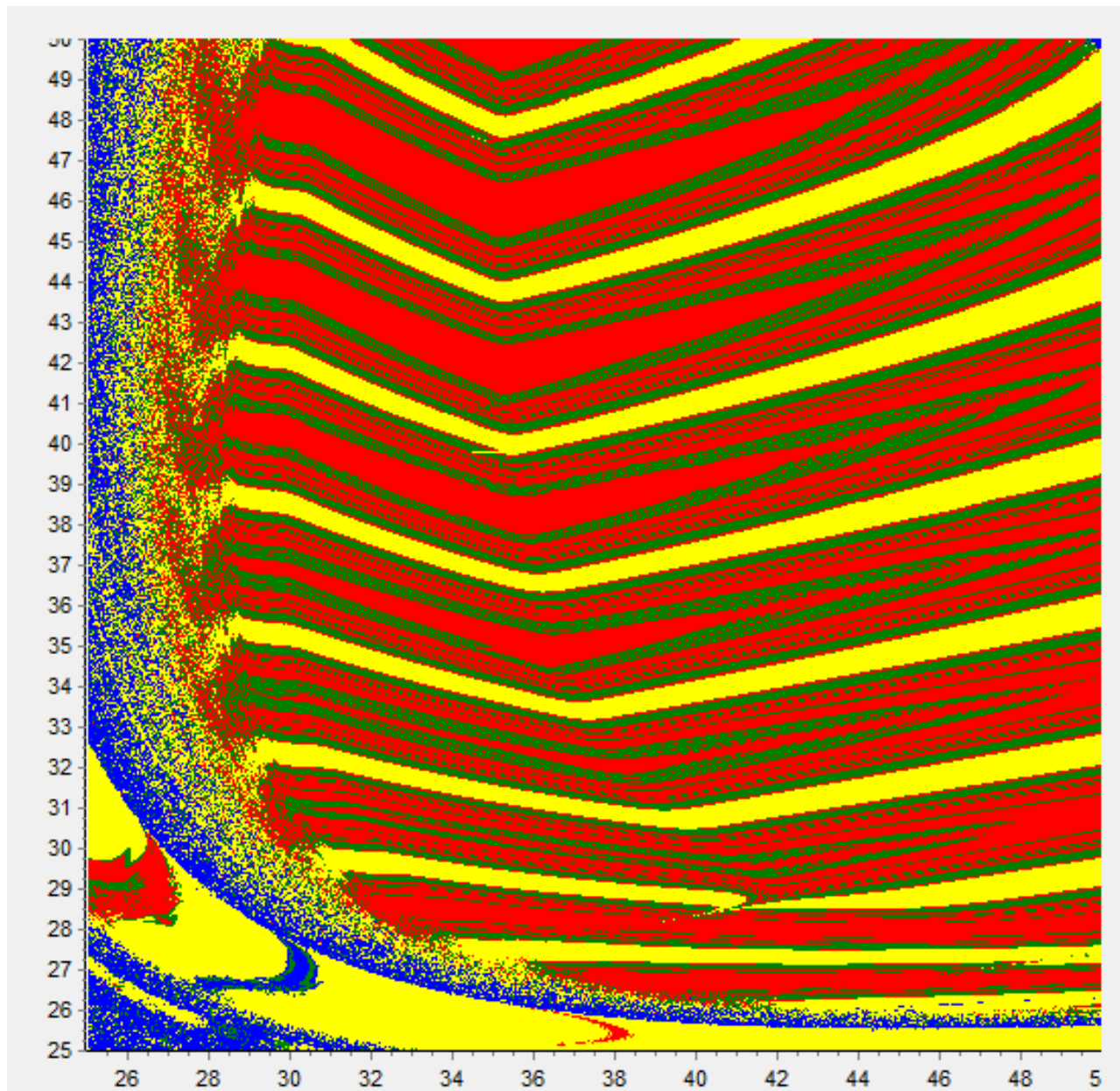


Рис. 10 Увеличенная область цветовой карты для  $b=2,6666$ .

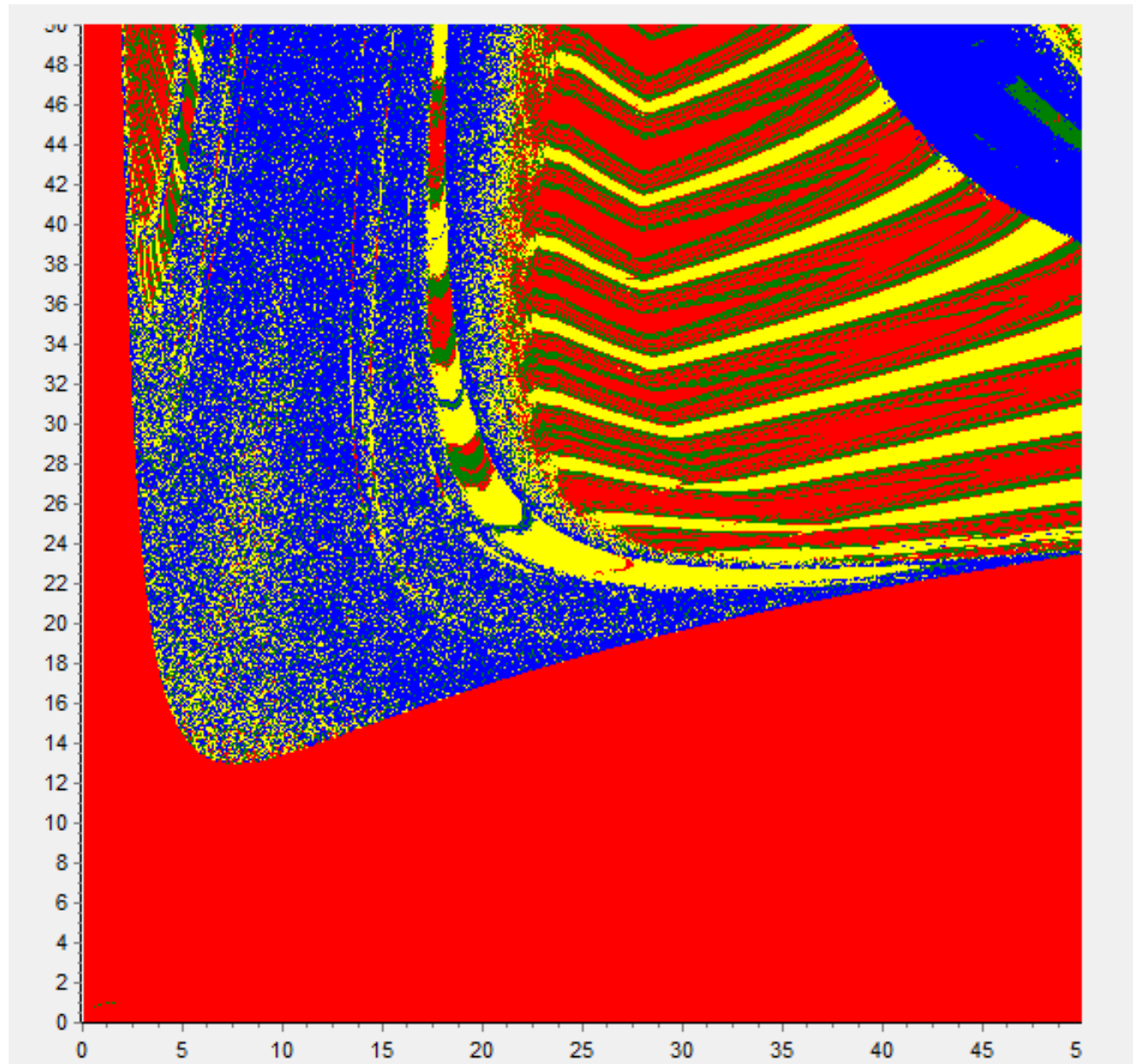


Рис. 11 Цветовая карта для  $b=2$ .



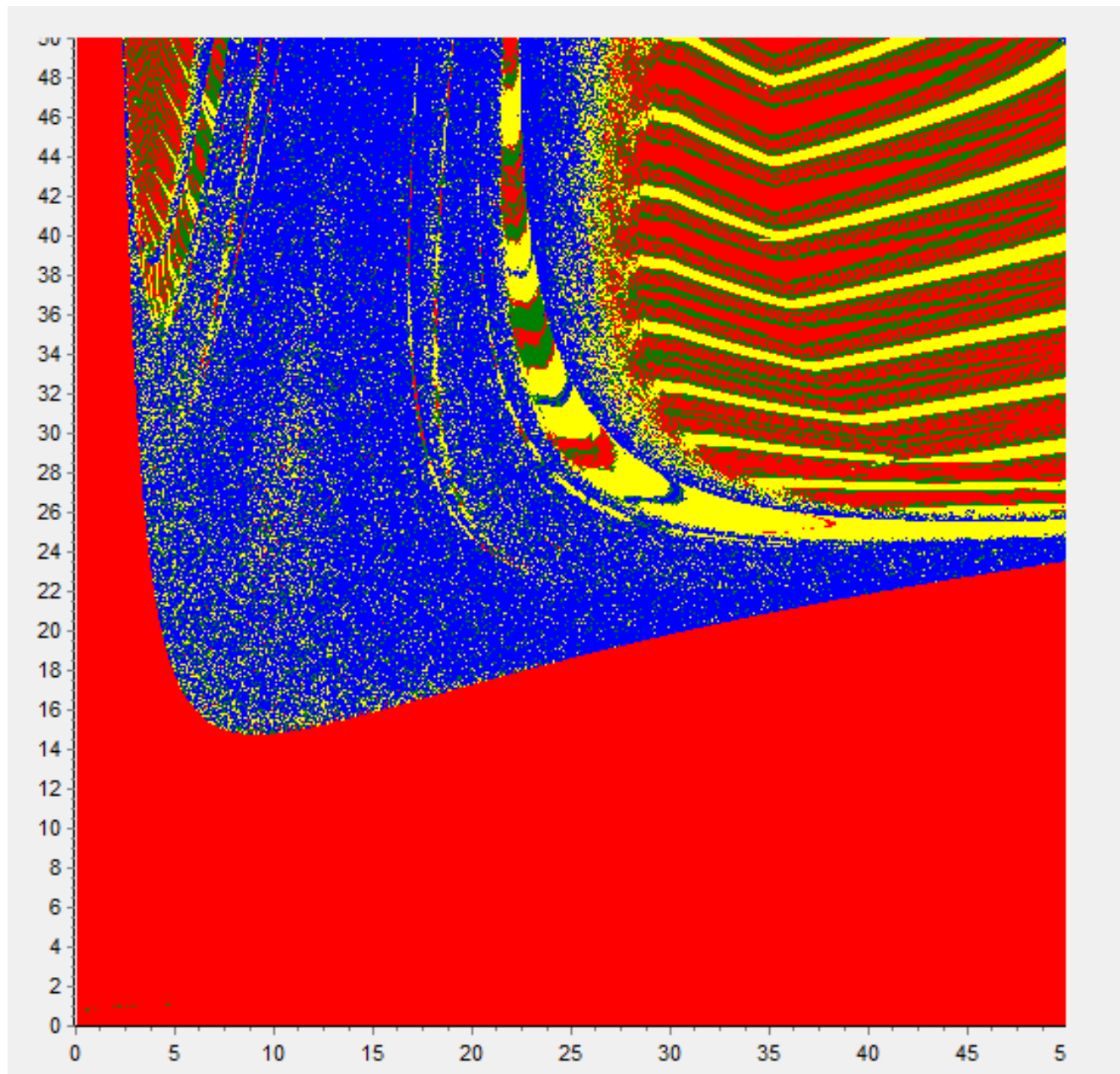


Рис. 12 Цветовая карта для  $b=2,6666$ .



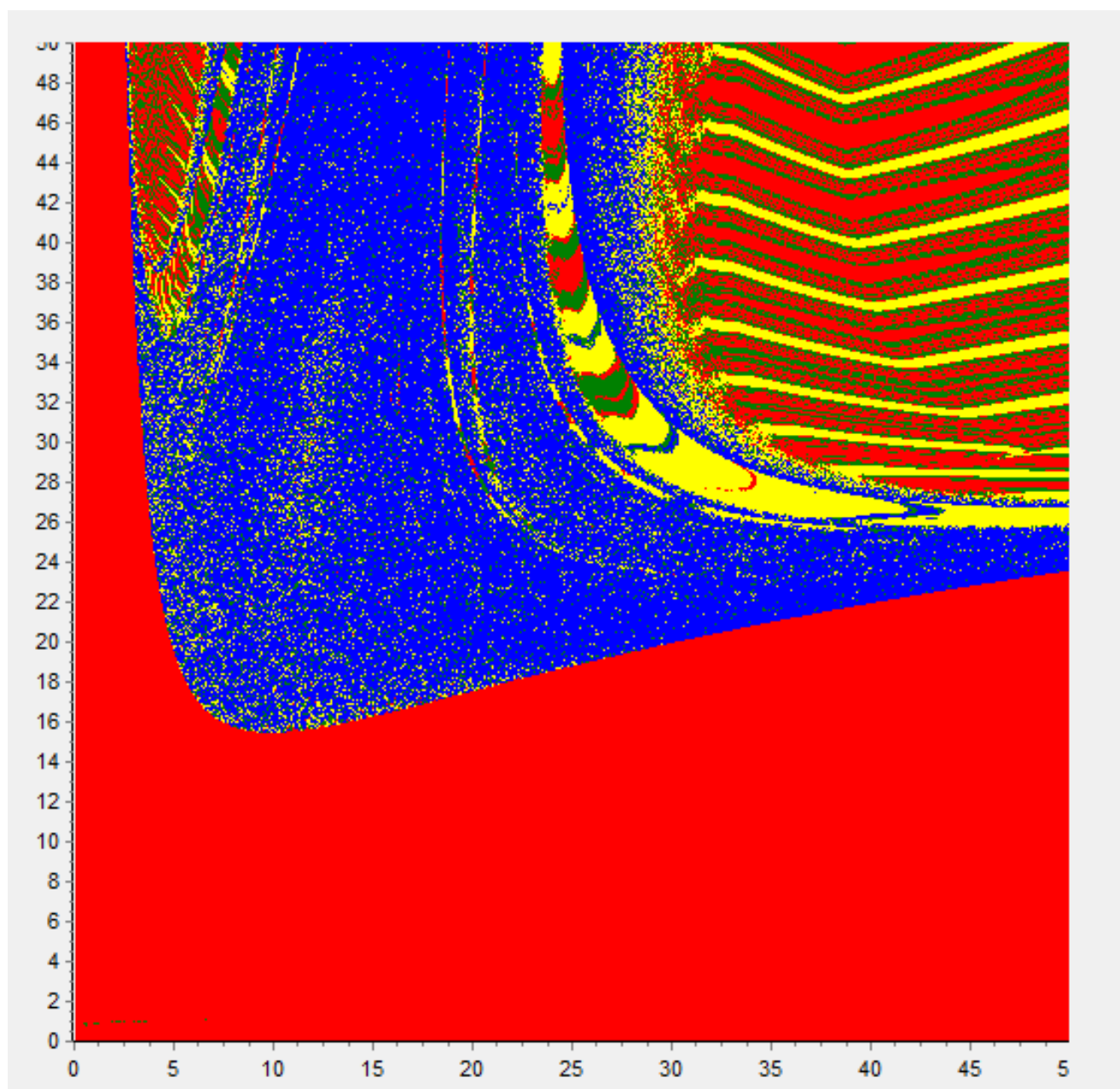


Рис. 13 Цветовая карта для  $b=3$ .

# Результат

- Линии области перемежающихся решений на самом деле не параллельны, как кажется с первого взгляда.
- На основании полученных цветовых карт мы выдвинули гипотезу, что область перемежающихся решений меняет свое положение при изменении коэффициента  $b$ , не меняя при этом своей структуры.

# Выводы

- Работа посвящена исследованию маломодовой модели конвекции (системе Лоренца ).
- Для решения системы выбран численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.
- Для обработки получаемых временных сигналов использованы Фурье- и вейвлет-анализ.
- Визуально выделены три основных типа поведения решений системы Лоренца: хаотический, квазихаотический, стационарный.
- Выявлен статистический критерий, позволяющий определить тип поведения системы Лоренца.
- Построены цветные карты, описывающие распределение характерных решений системы в зависимости от значений параметров модели.