

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный
исследовательский политехнический университет»

Математическая модель потери устойчивости автомобиля

Павел Сергеевич Волегов,
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСР ПНИПУ

Проект «Одаренные дети. Математика»

Проблема

Схема заднего привода

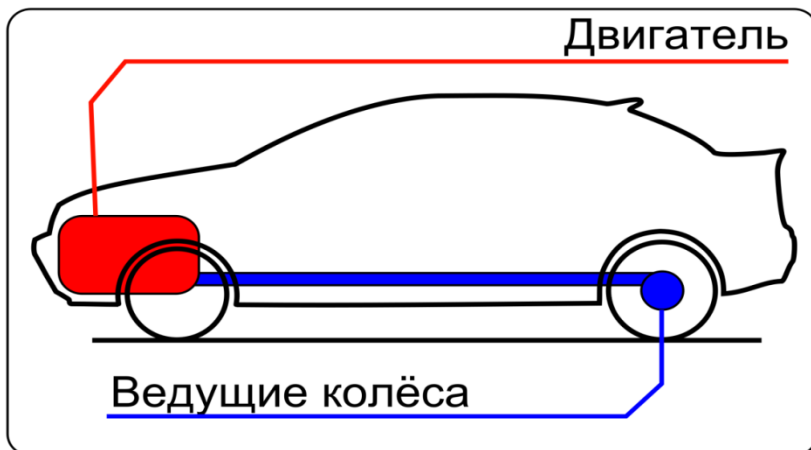


Схема переднего привода

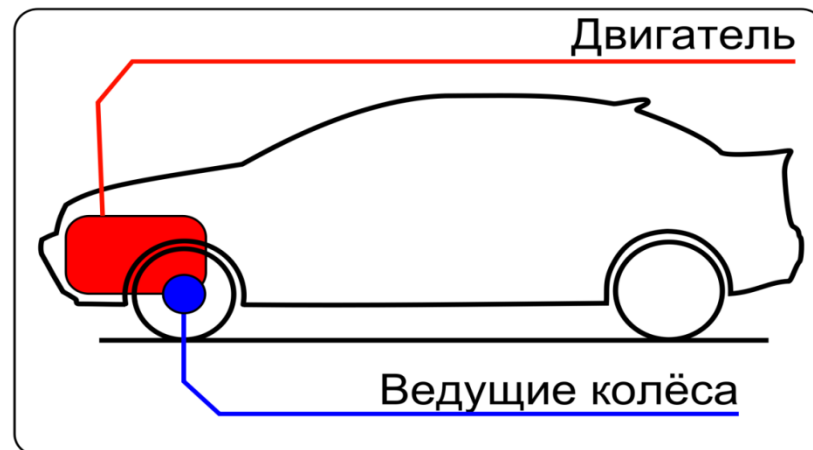
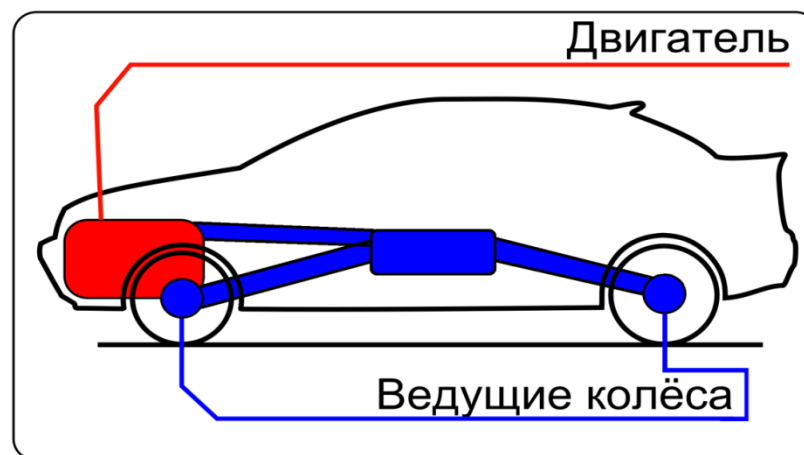


Схема полного привода

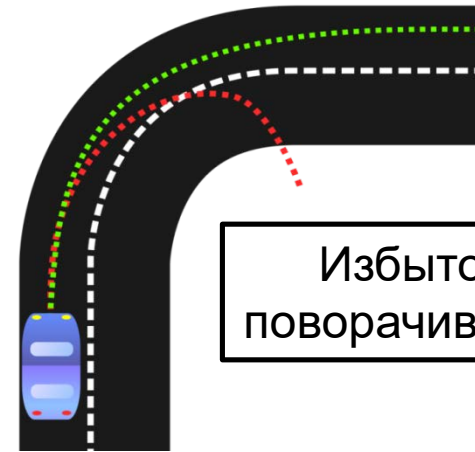


Актуальность

?

Автомобиль с каким приводом может развить наибольшую скорость без потери сцепления с дорогой или наиболее эффективно позволит выйти из заноса

Тип поворачиваемости зависит от кривизны поворота и скорости автомобиля.



Избыточная поворачиваемость



Недостаточная поворачиваемость

Цель

***Требуется
разработать и
исследовать
математическую модель,
описывающую движение
автомобиля по дороге.***

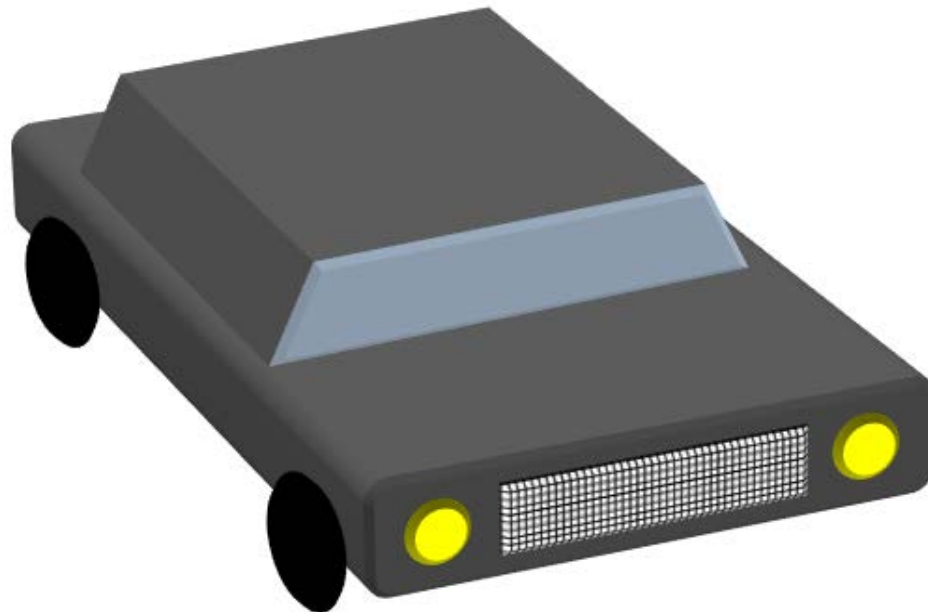
Объект моделирования –
автомобиль, абстрагируемый
абсолютно твердым телом (в
общем случае произвольной
формы), имеющим точки опоры
(колёса).



Задачи

Для достижения поставленной цели необходимо:

- связать реакцию подвески с линейной скоростью автомобиля и радиусом поворота;
- сформулировать критерий потери сцепления колеса и поверхности дороги;
- записать уравнения движения автомобиля как абсолютно твердого тела.



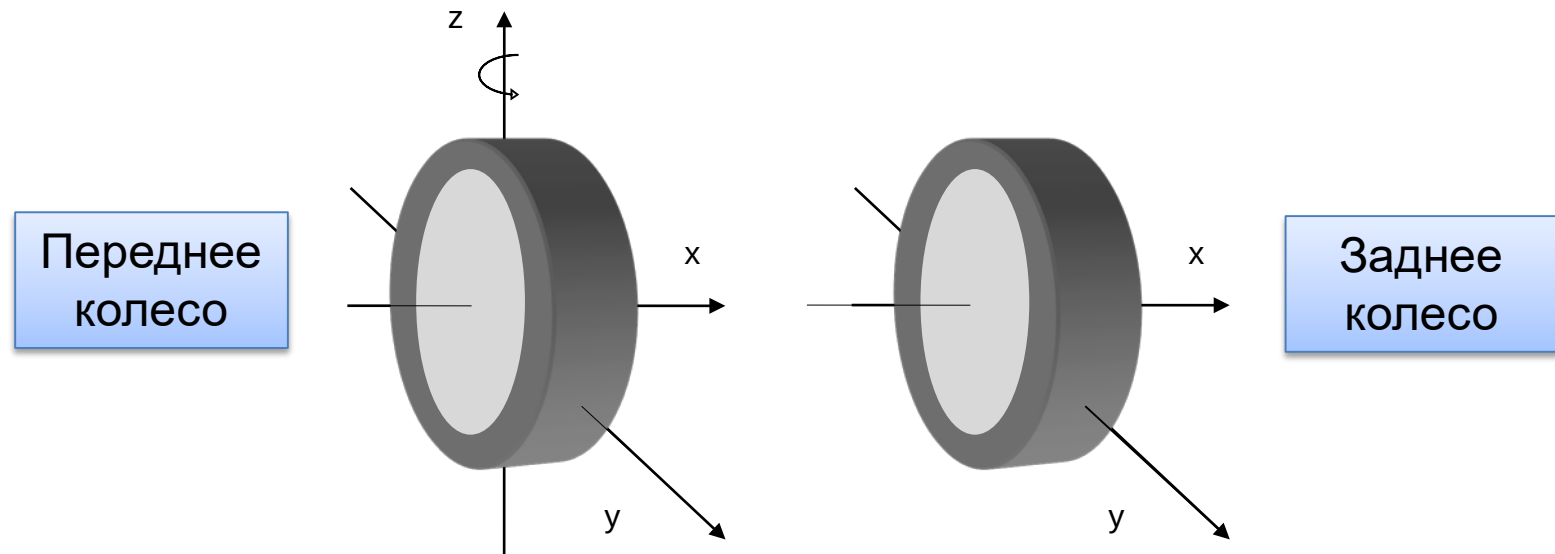
Концептуальная постановка

Был выдвинут следующий ряд **гипотез**:

- движение автомобиля описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- корпус автомобиля является абсолютно твёрдым телом;
- объект моделирования имеет четыре точки касания с поверхностью;
- точки касания являются вершинами прямоугольника;
- центр масс автомобиля лежит в центре прямоугольника;
- движение тела происходит в одной плоскости;

Концептуальная постановка

- тело имеет три степени свободы;
- задние колёса не имеют степеней свободы, а передние имеют одну степень свободы;
- во время движения на колёса действует сила трения качения, в момент заноса возникает трение скольжения;
- будем считать, что коэффициент трения качения при движении не зависит от скорости;
- сила сопротивления воздуха отсутствует.



Математическая постановка

Свяжем реакцию подвески с радиусом поворота, линейной скоростью, массой и размерами автомобиля.

$$N_1 = N_3 = \frac{lmg + \frac{dmV^2}{R}}{4l} \quad (1)$$

$$N_2 = N_4 = \frac{lmg - \frac{dmV^2}{R}}{4l} \quad (2)$$

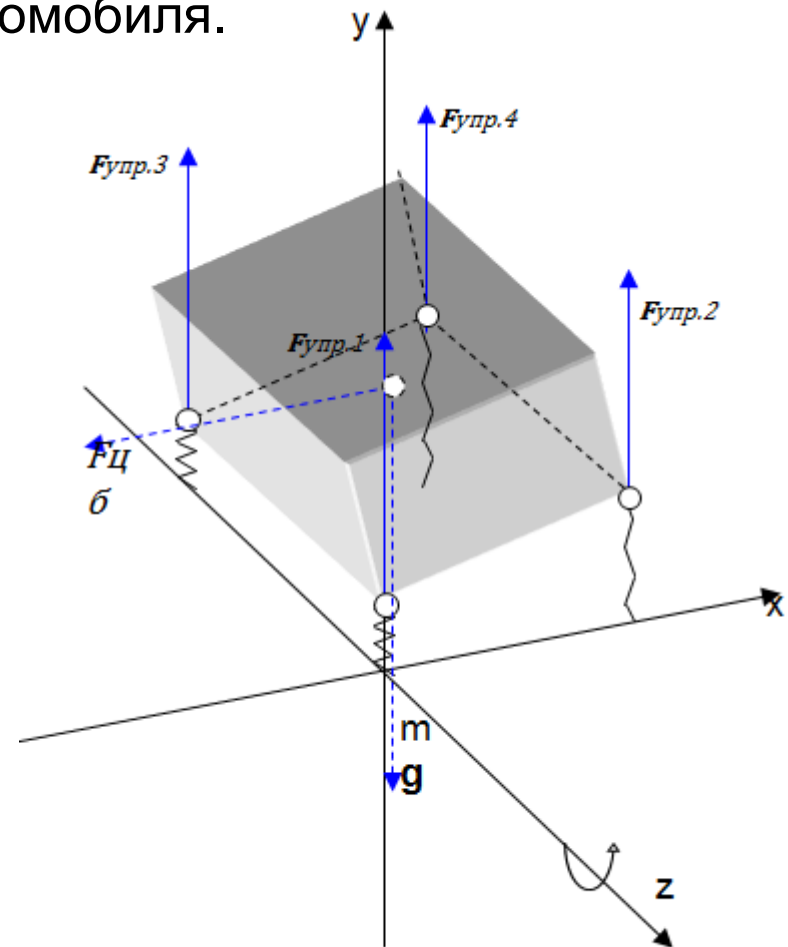


Рис. 1. Реакции опоры

Математическая постановка

Получим уравнение движения автомобиля.

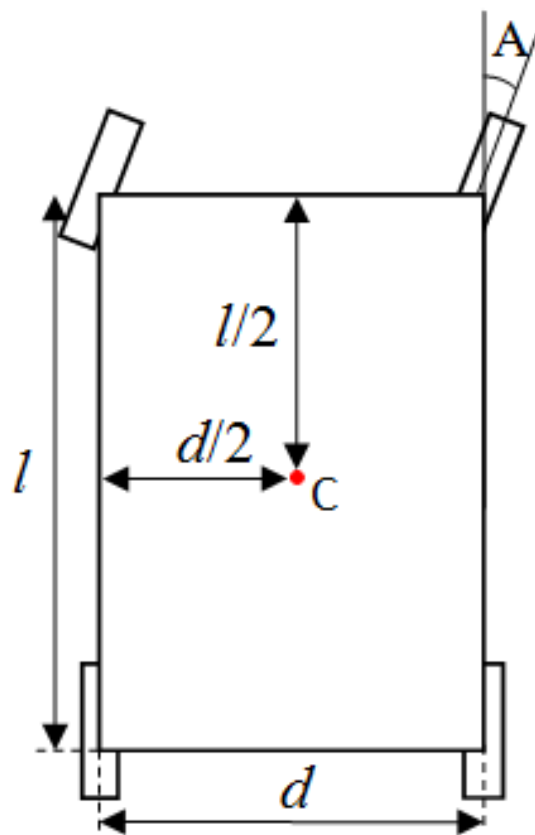
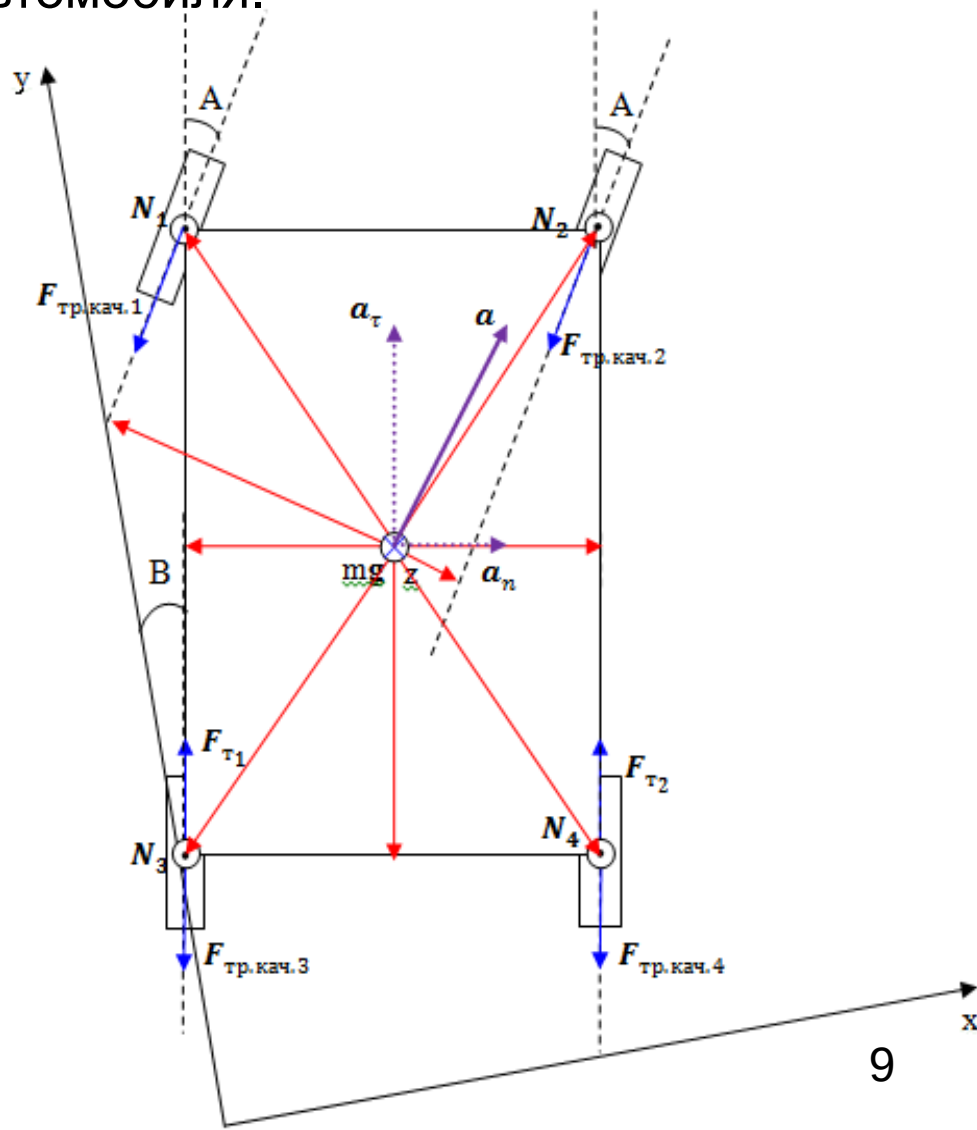


Рис. 2. Закон движения



Математическая постановка

$$\left\{ \begin{aligned}
 mx''(t) &= 2 \frac{M(t)}{R} \sin(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2l} \sin(B(t)) - \\
 &\frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(B(t)) - \\
 &\frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)) - \\
 &\frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \sin(A(t) + B(t)); \\
 my''(t) &= 2 \frac{M(t)}{R} \cos(B(t)) - \frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) - \\
 &\frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \ln(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(B(t)) -
 \end{aligned} \right.$$

Математическая постановка

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t)) - \\ & \frac{\Psi}{R} \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \cos(A(t) + B(t)); \\ & \frac{m(d^2 + l^2)}{12} B''(t) = \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\ & \frac{d\Psi}{2R} \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} - \\ & \frac{mgd / 2 + \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) + A(t))} + \\ & \frac{mgd / 2 - \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} \operatorname{Im}(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{2d} \frac{\Psi}{R} \frac{\sqrt{(\frac{d}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2}}{\sin(\arctan(\frac{l}{d}) - A(t))}; \end{aligned} \right.$$

Математическая постановка

Получим законы движения для автомобиля с проскальзыванием и без проскальзывания ведущих колёс.

$$m\alpha(t) = \frac{2M(t)}{R} - m\frac{g}{2}\mu - mg\frac{\Psi}{2R} \quad (3)$$

$$m\alpha(t) = \frac{2M(t)}{R} - mg\frac{\Psi}{R} \quad (4)$$

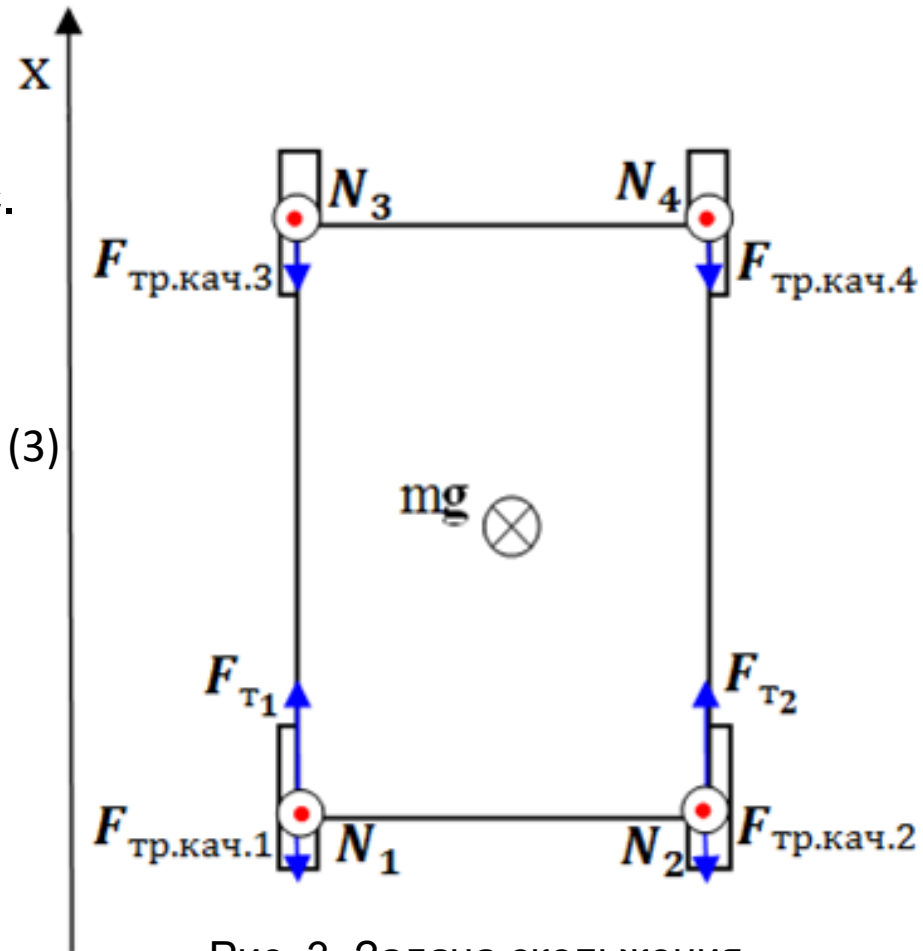


Рис. 3. Задача скольжения

Результаты

Численные характеристики модели:

- Ширина d равна 1.825 м.
- Длина l равна 4.625 м.
- Масса m равна 1625 кг.
- Коэффициент трения μ скольжения равен 0.65.
- Коэффициент трения Ψ качения равен 0.0225 м.
- Радиус колеса R равен 0.24 м.



Результаты

Построим графики зависимостей ускорения от времени согласно законам (3),(4), чтобы сравнить движение с проскальзыванием и без.

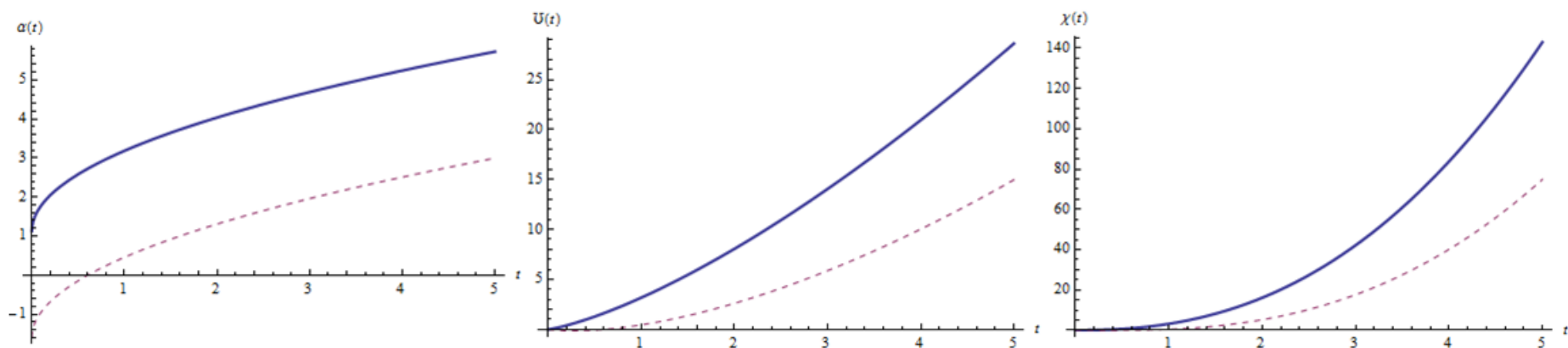


Рис. 4. Сравнение скольжения и сцепления

Результаты

Автомобиль движется с некоторой скоростью, поворачивает передние колеса на некоторый угол и начинает увеличивать вращающий момент.

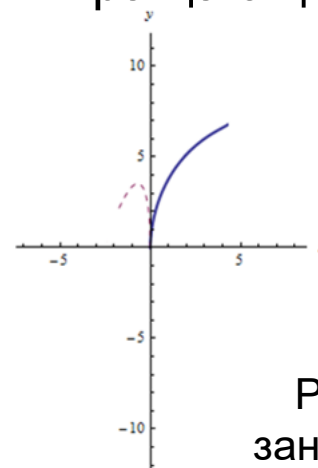
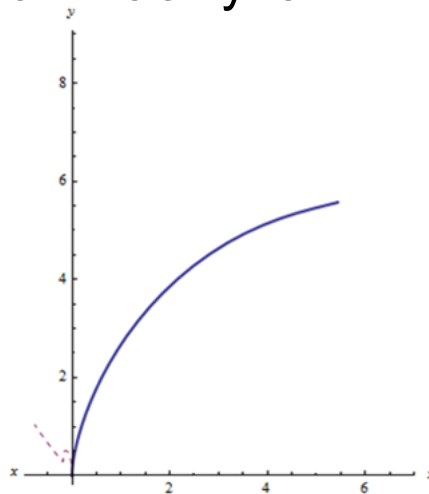
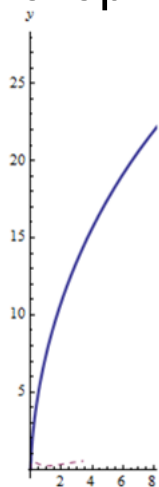


Рис. 5. Вход в занос, траектории

Задний привод

Передний привод

Полный привод

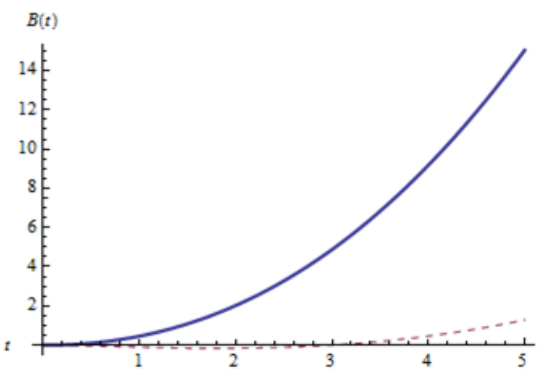
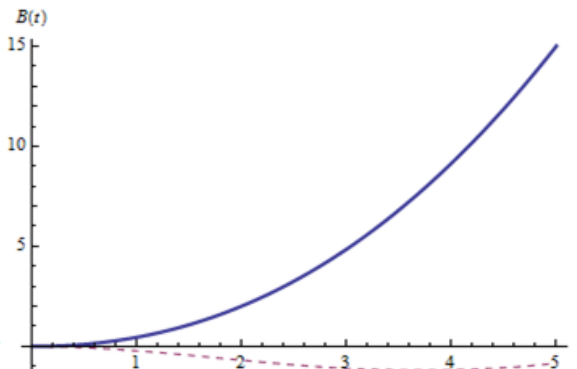
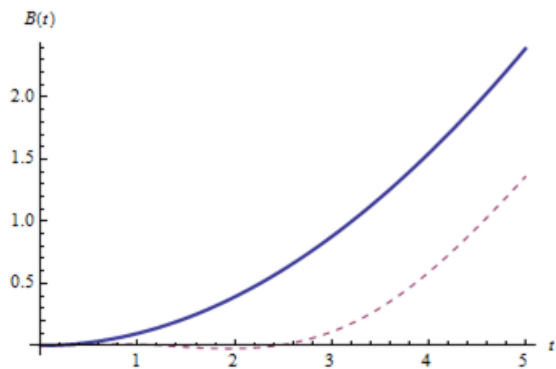


Рис. 6. Вход в занос, угол

Результаты

Автомобиль, двигаясь в заносе, перестает ускоряться и поворачивает колеса параллельно нормальному направлению движения.

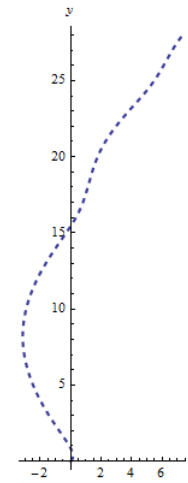
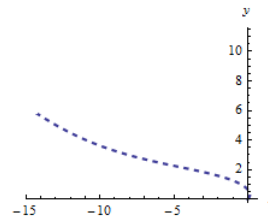
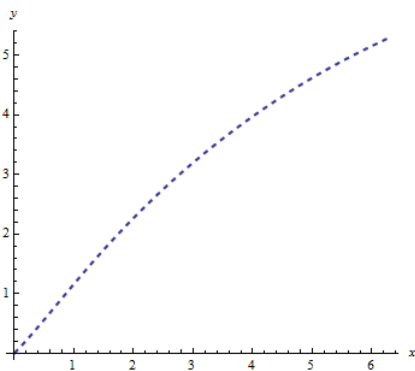


Рис. 7. Выход из заноса, траектории

Задний привод

Передний привод

Полный привод

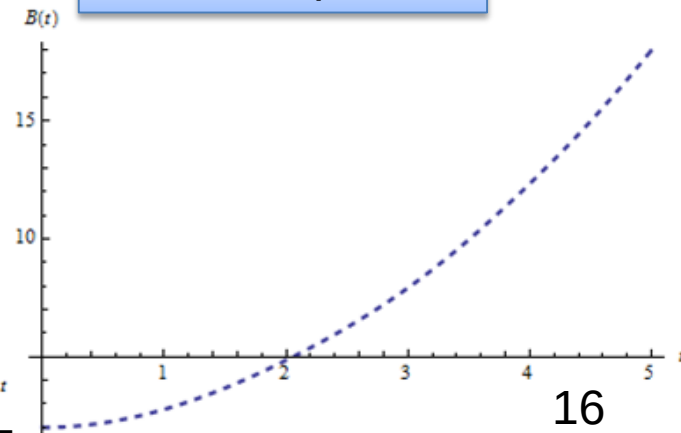
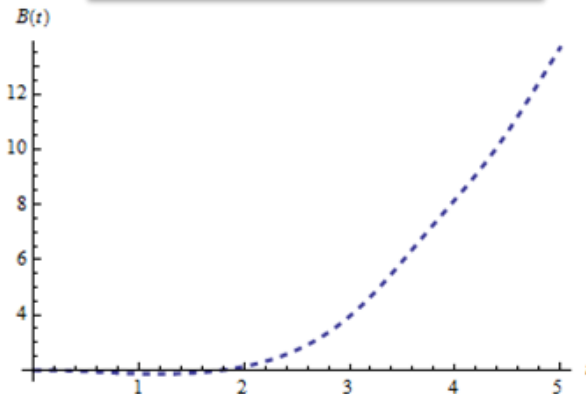
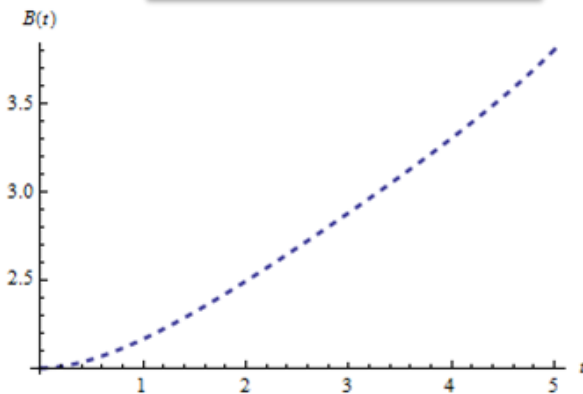


Рис. 8. Выход из заноса, угол

Заключение

Однозначно сказать, какой привод лучше, нельзя, полезность того или иного привода зависит от каждой конкретной ситуации и условий, в которых она возникает.



Заключение

В таблице указаны плюсы и минусы изученных типов привода.

Тип привода	+	-
Задний	Легко выходит из заноса	Легко уходит в занос
Полный	Очень сильно сопротивляется уходу в занос	Теряет сцепление всеми колёсами
Передний	Трудно увести в занос	Трудно вывести из заноса

Таблица 1. Выводы