

ФГБОУ ВПО «Пермский национальный
исследовательский политехнический университет»

Математическое моделирование полёта самолёта в различных погодных условиях

Павел Сергеевич Волегов,
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСР ПНИПУ

Проект «Одаренные дети. Математика»

ПРОБЛЕМА



Рис. 1. Пассажиры в панике

При попадании в зону турбулентности пассажиры испытывают некоторый дискомфорт, связанный с ускорениями самолёта.

Турбулентность— физическое явление, характеризующееся нерегулярными взаимными

перемещениями объёмов среды (жидкости или газа) и их перемешиванием и сопровождающееся хаотическими изменениями газодинамических переменных в пространстве и времени.

АКТУАЛЬНОСТЬ



Доля авиaperелётов,
сопровождаящаяся
попаданием лайнера
в турбулентные зоны

Одновременно
находятся в
воздухе

350000 человек
3500 самолётов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ



Рис.2. Турбулентные потоки за самолётом

Целью работы является построение математической модели поведения самолёта в воздухе и исследование с её помощью горизонтальной и вертикальной устойчивости самолёта в зависимости от внешних факторов.

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

Объект исследования → самолёт

Система отсчёта → инерциальная

Масса → постоянна и сосредоточена в фюзеляже

Самолёт → абсолютно твёрдое тело

Оледенение → отсутствует

Электронные помощники → отсутствуют

Характеристики самолёта → Boeing 737

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

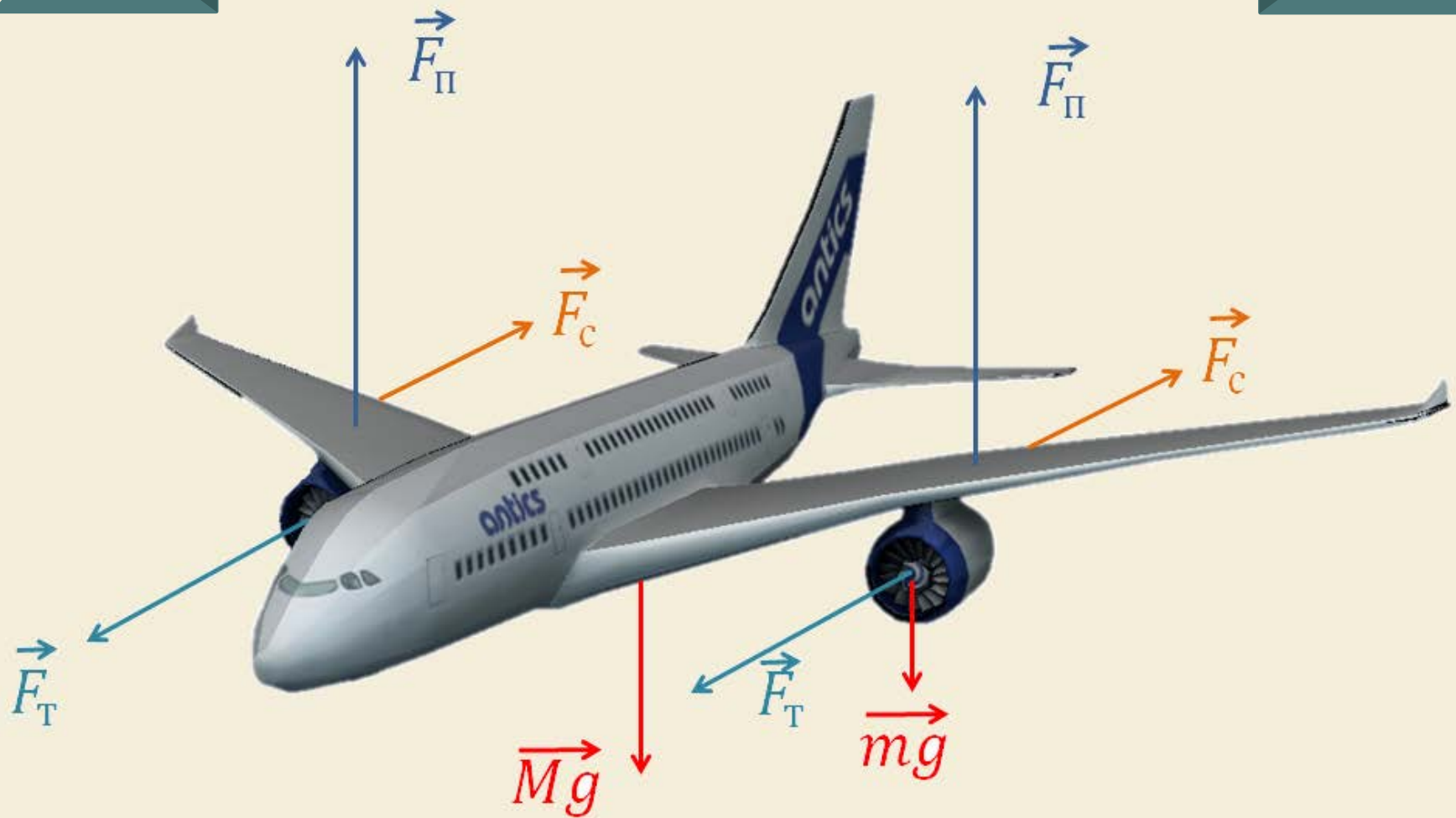


Рис.3. Силы, действующие на самолёт

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

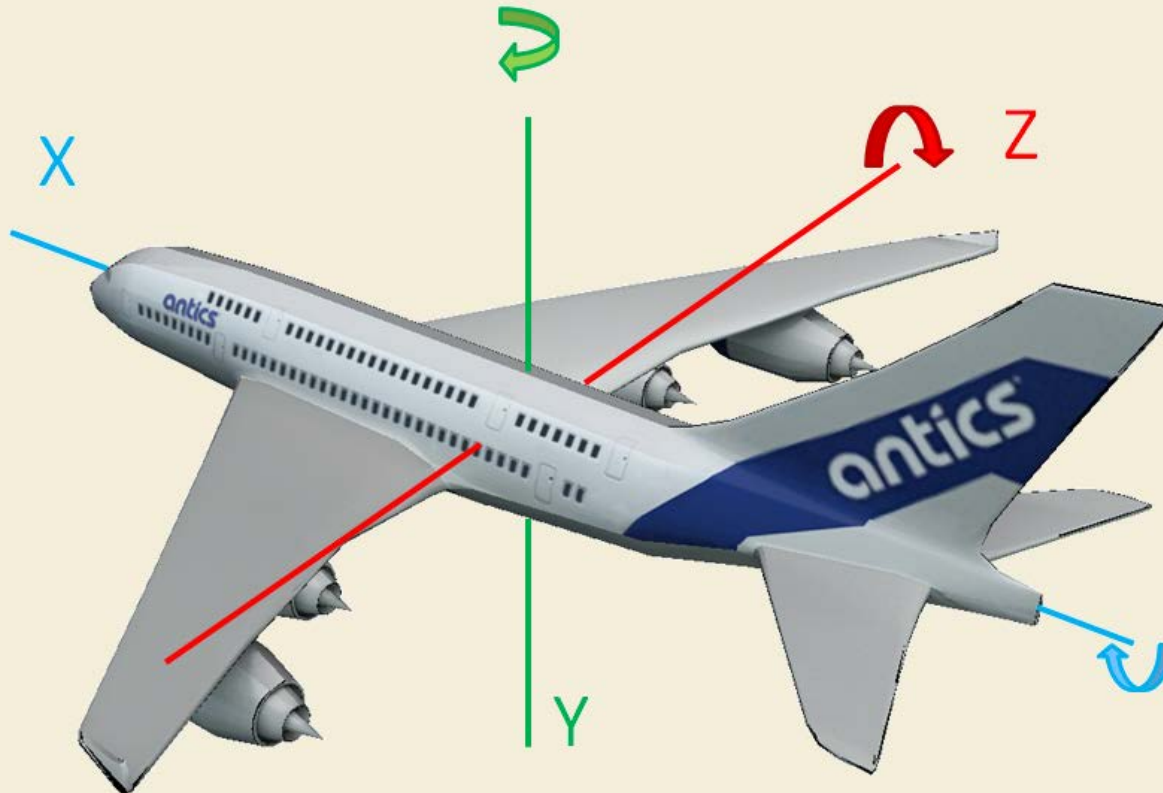


Рис. 4. Вращательные степени свободы самолёта

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Проекции второго закона Ньютона на оси координат в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}y''(t)(2m + M) &= \\ &= (F_{n0d1} + F_{n0d2}) \cos \gamma(t) \cos \alpha(t) + (F_{m1} + F_{m2}) \sin \alpha(t) \sin(\beta t) - F_{comp} \cos \beta(t) \cos \alpha(t) - (M + 2m) g,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z''(t)(2m + M) &= \\ &= (F_{m1} + F_{m2}) \sin \beta(t) \cos \alpha(t) - (F_{n1} + F_{n2}) \cos \alpha(t) \cos \gamma(t) \sin(\beta t) - F_{comp} \sin \beta(t) \cos \alpha(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x''(t)(2m + M) &= \\ &= (F_{m1} + F_{m2}) \cos \alpha(t) \cos \beta(t) - (F_{n1} + F_{n2}) \cos \beta(t) \cos \gamma(t) \sin \alpha(t) - F_{comp} \cos \alpha(t) \cos \beta(t),\end{aligned}$$

Проекции уравнения моментов на оси координат в дифференциальной форме:

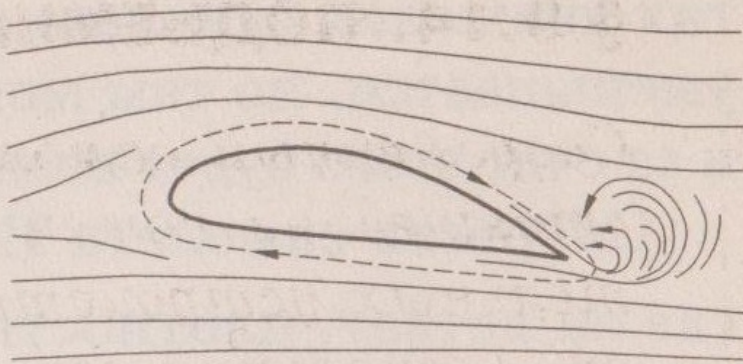
$$\begin{aligned}\frac{\alpha''(t)M(B^2 + C^2)}{5} &= \\ &= \rho S(x'(t) + V_{zem})U \cos(\alpha - q_1) \sin \beta - 2\rho S(x'(t) + V_{zem})U \cos(\alpha - q_2) \sin \beta E,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\beta''(t)M(A^2 + B^2)}{5} &= \\ &= (\rho S(x'(t) + V_{zem})U \sin(\alpha - q_1) \sin \beta \cos \gamma - \rho S(x'(t) + V_{zem})U \sin(\alpha - q_2) \sin \beta \cos \gamma) \frac{d}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma''(t)M(A^2 + C^2)}{5} &= \\ &= (\rho S(x'(t) + V_{zem})U \cos(\alpha - q_1) \sin \beta \sin \gamma - \rho S(x'(t) + V_{zem})U \cos(\alpha - q_2) \sin \beta \sin \gamma) \frac{d}{2}.\end{aligned}$$

ВЫВОД ПОДЪЁМНОЙ СИЛЫ

Образование вихрей и циркуляция воздуха:



По закону сложения скоростей:

$$V_{над} = V \cos \alpha + U,$$

$$V_{под} = V \cos \alpha - U.$$

Разность давлений над и под крылом:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{1}{2} \rho ((V \cos \alpha + U)^2 - (V \cos \alpha - U)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \rho 2U 2V \cos \alpha = 2\rho VU \cos \alpha \end{aligned}$$

Подъёмная сила крыла:

$$F_{под} = \Delta p S = 2\rho S V U \cos \alpha$$

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

$$x''(t)(2m + M) = 2F_t \cos \alpha \cos \gamma - \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \sin(\alpha - q_1) \sin \beta \cos \gamma - \\ - \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \sin(\alpha - q_2) \sin \beta \cos \gamma - 2 \cos \gamma \cos \alpha \left(kU^2 - \frac{2\rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})^2}{\pi \lambda} \right);$$

$$y''(t)(2m + M) = \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \cos(\alpha - q_1) \sin \beta + 2F_t \sin \alpha + \\ + 2\rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \cos(\alpha - q_2) \sin \beta - (2m + M)g - 2 \cos \gamma \sin \alpha \left(kU^2 - \frac{2\rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})^2}{\pi \lambda} \right);$$

$$z''(t)(2m + M) = 2F_t \cos \alpha \sin \gamma + \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \cos(\alpha - q_1) \sin \beta \sin \gamma + \\ + \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \cos(\alpha - q_2) \sin \beta \sin \gamma - 2 \sin \gamma \sin \alpha \left(kU^2 - \frac{2\rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})^2}{\pi \lambda} \right);$$

$$\frac{\alpha''(t)M(Bb^2 + Cc^2)}{5} = \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \sin \beta (\cos(\alpha - q_1) - \cos(\alpha - q_2))E;$$

$$\frac{\beta''(t)M(Aa^2 + Bb^2)}{5} = \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}}) \sin \beta \cos \gamma U (\sin(\alpha - q_1) - \sin(\alpha - q_2)) \frac{d}{2};$$

$$\frac{\gamma''(t)M(Aa^2 + Cc^2)}{5} = \rho S(x'(t) + V_{\text{зем}})U \sin \beta \sin \gamma (\cos(\alpha - q_1) - \cos(\alpha - q_2)) \frac{d}{2}.$$

Эксперименты

Были проведены численные эксперименты, соответствующие следующим модельным ситуациям:

- Прохождение воздушной ямы
- Прохождение турбулентной зоны
- Прохождение грозового облака
- Попадание в зону струйных течений воздуха
- Посадка самолёта при сильном боковом ветре
- Взлет самолёта при сильном боковом ветре
- Разворот на высоте при сильном ветре
- Отказ двигателя на высоте

РЕЗУЛЬТАТЫ

1 Прохождение воздушной ямы



Закон изменения плотности среды:

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_m \cos(\omega t)$$

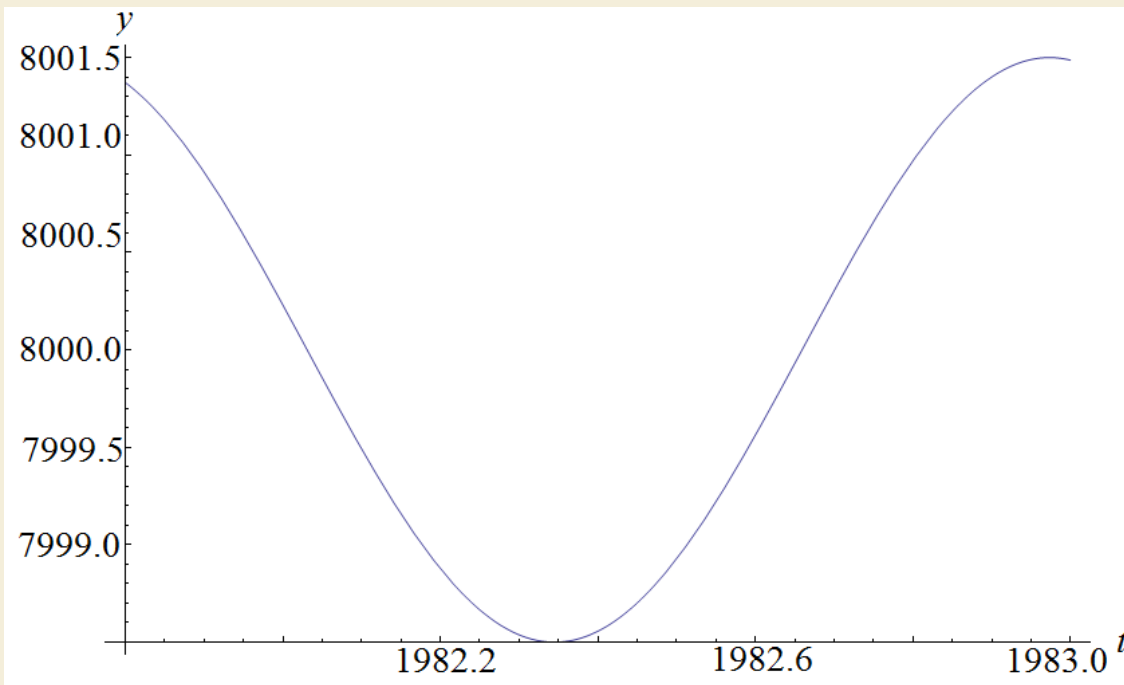
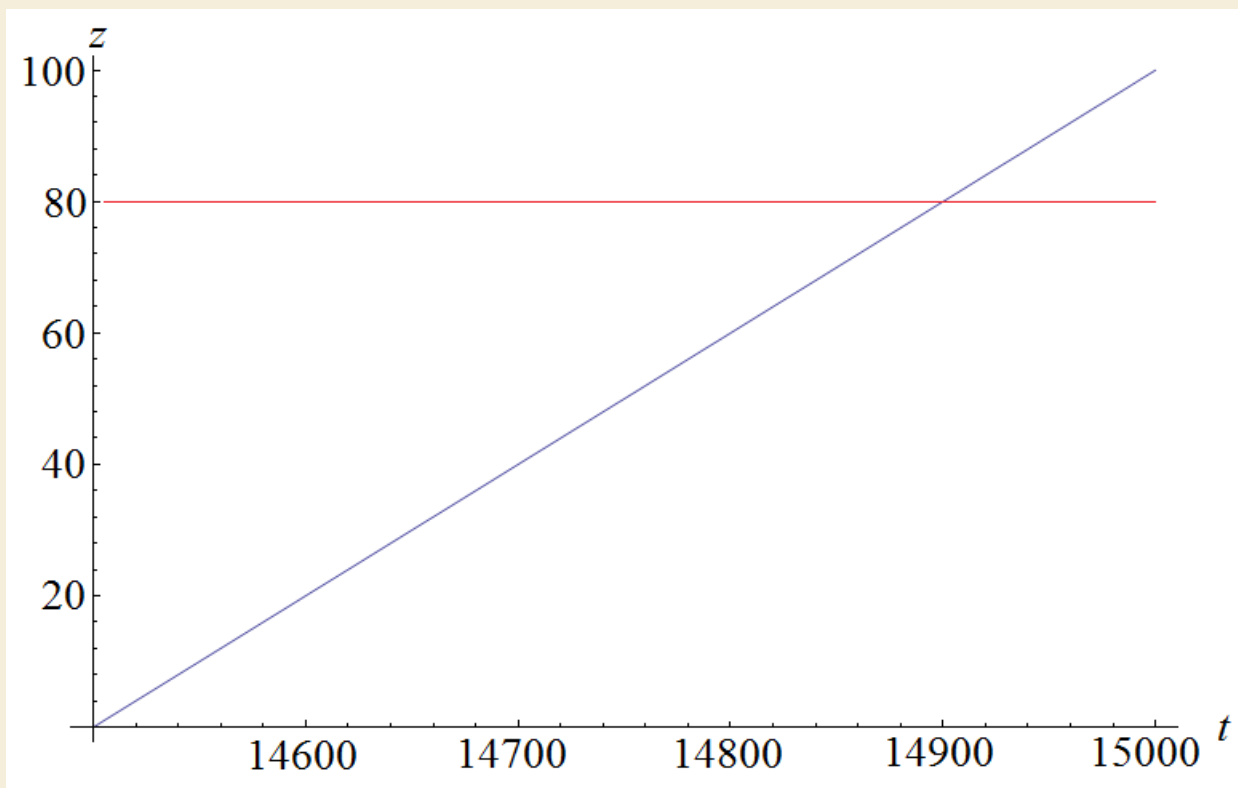


Рис. 5. Изменение высоты при прохождении воздушной ямы

РЕЗУЛЬТАТЫ

2 Посадка самолёта при сильном боковом ветре



Граница взлётно-посадочной полосы

Рис. 6. Смещение самолёта вдоль поперечной оси вследствие сильного бокового ветра во время посадки

РЕЗУЛЬТАТЫ

3 Взлет самолёта при сильном боковом ветре

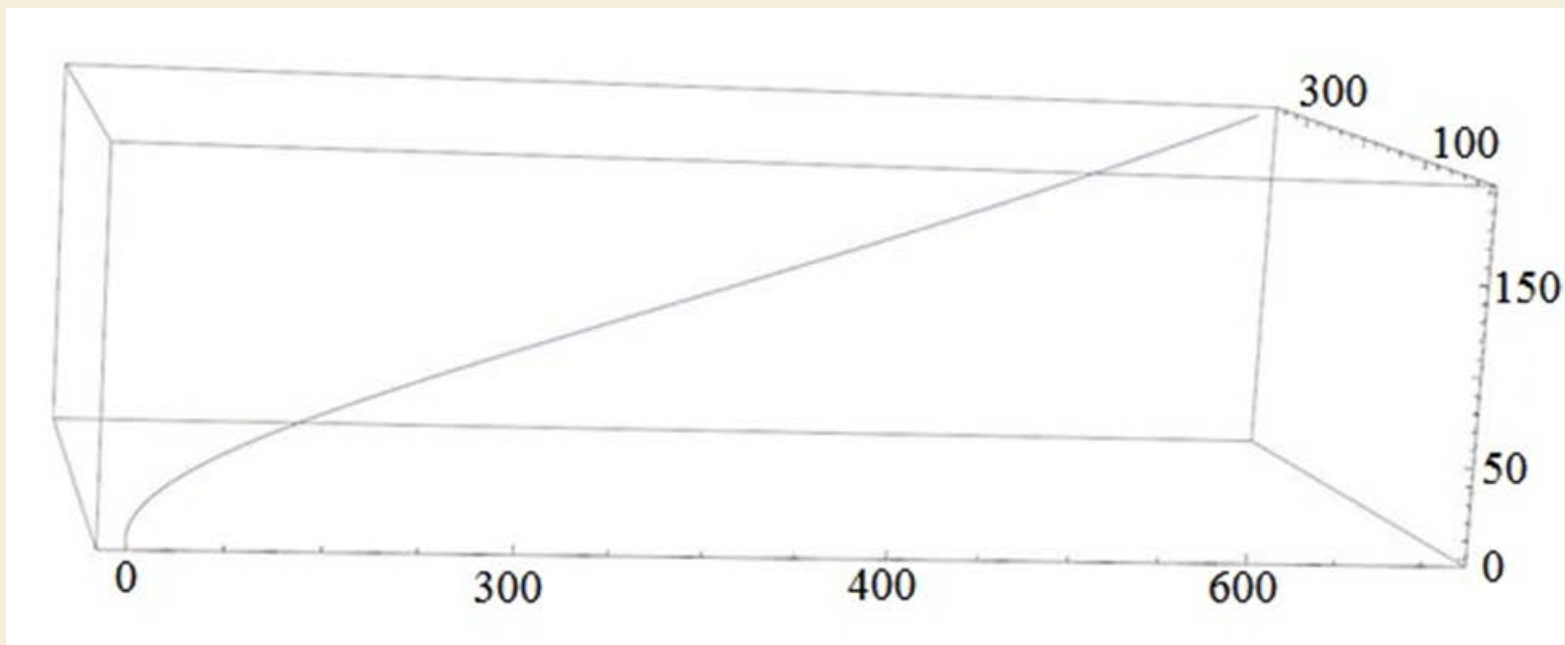


Рис. 7. Траектория при взлете с сильным боковым ветром

РЕЗУЛЬТАТЫ

4 Разворот на высоте при сильном ветре

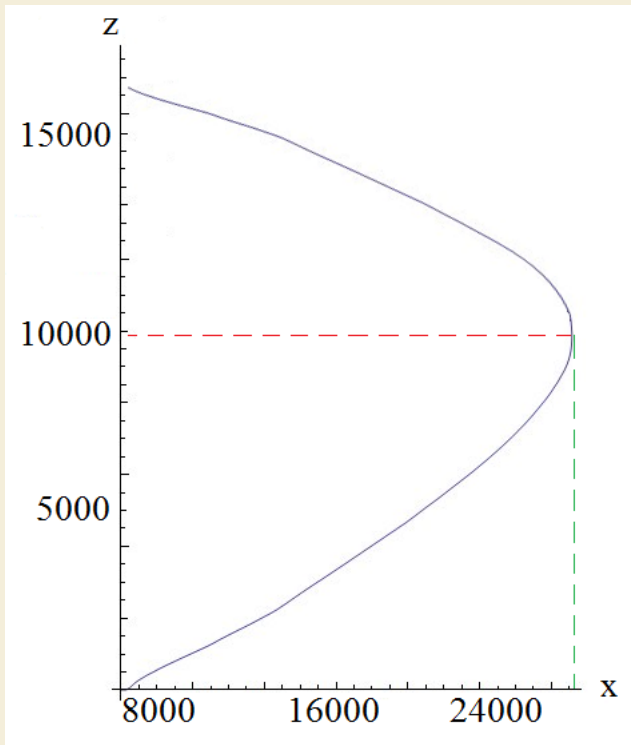


Рис. 8. Траектория при развороте самолёта на высоте 8000 м

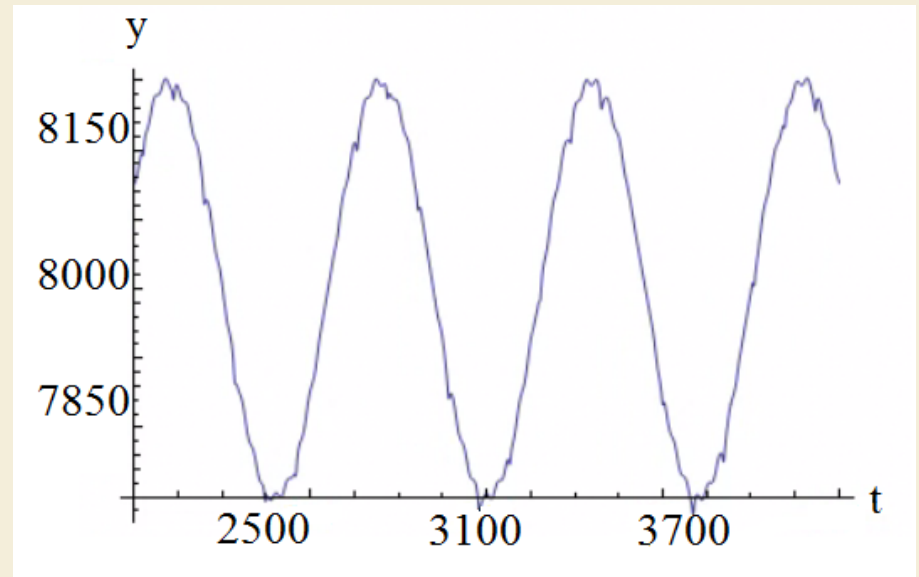


Рис. 9. Колебания высоты во время разворота вследствие турбулентности и изменений скорости

Закон изменения плотности среды: $\rho(t) = \rho_0 + \rho_m \cos(\omega t)$

РЕЗУЛЬТАТЫ

5 Отказ двигателя на высоте

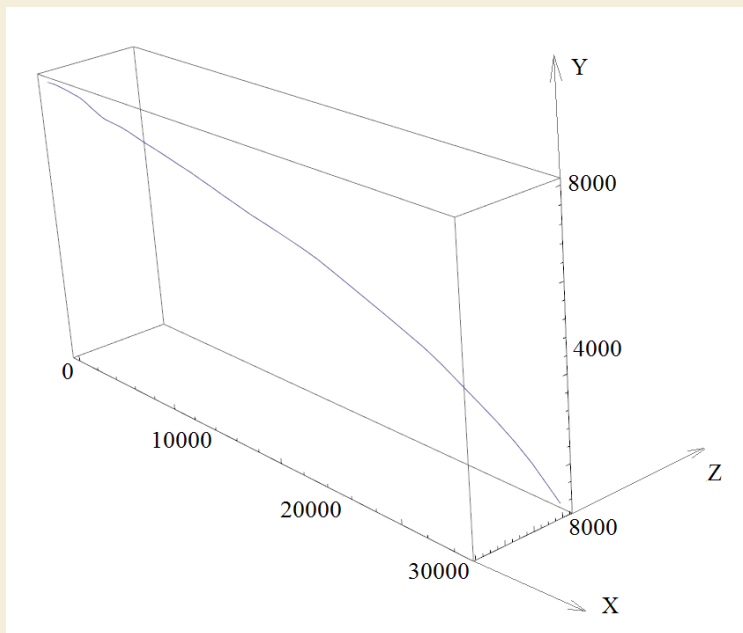


Рис. 10. Траектория движения самолёта при отказавшем двигателе

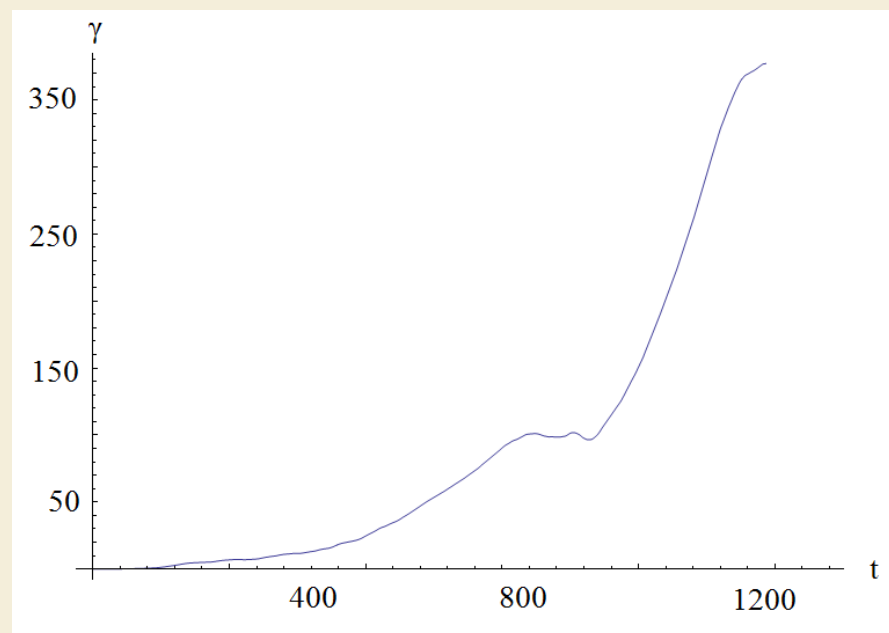


Рис. 11. Зависимость угла крена γ от времени при отказе одного из двигателей

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прохождение воздушных ям и турбулентных зон.



Взлёт при сильном боковом ветре



Посадка при сильном боковом ветре



Разворот на высоте при сильном ветре



Отказ двигателя



Безопасно



Небезопасно

Счастливых вам полётов!



СОПРОТИВЛЕНИЕ

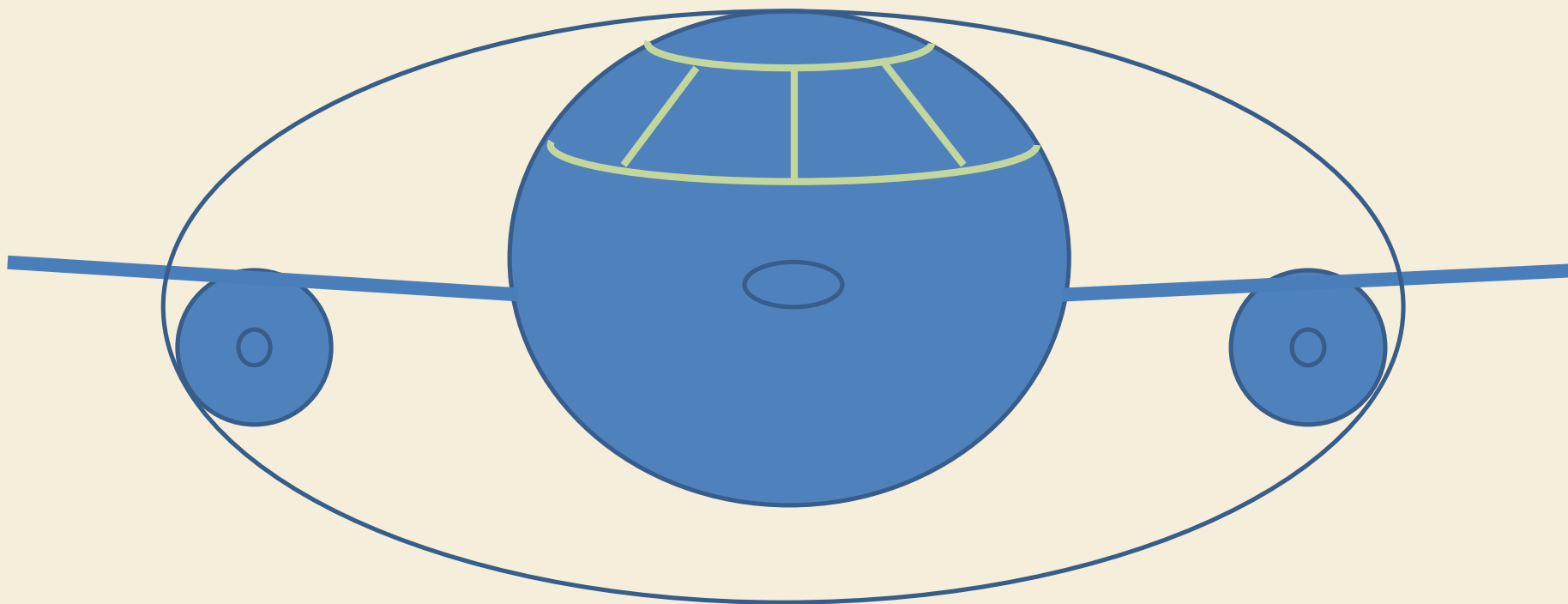


Силы сопротивления, действующие на самолет во время полета



Эквивалентные силы сопротивления

АППРОКСИМАЦИЯ САМОЛЁТА ЭЛЛИПСОИДОМ



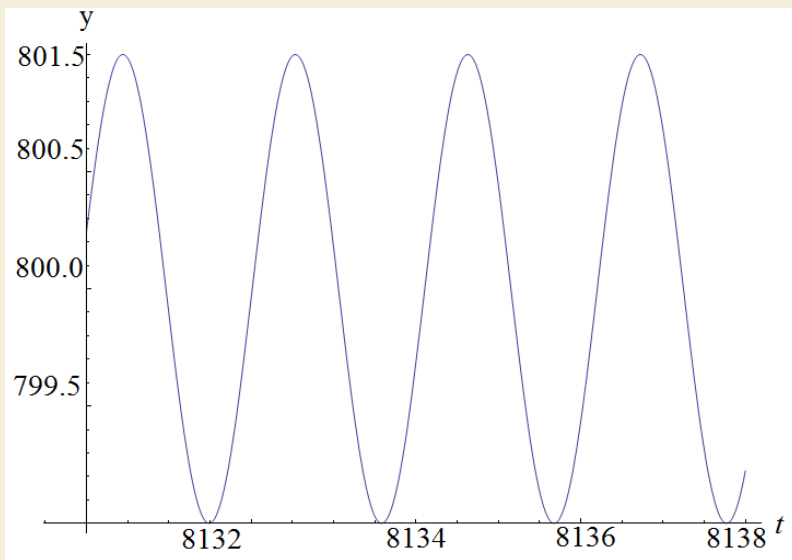
Контуром обозначен аппроксимирующий эллипсоид

АДЕКВАТНОСТЬ

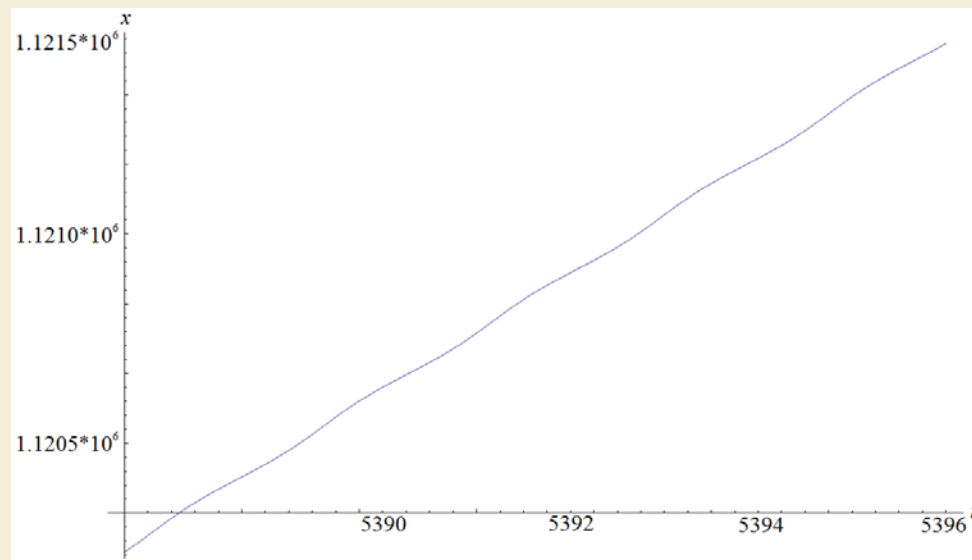
Характеристика	Реальные данные	Полученные данные	Погрешность
Крейсерская скорость	224 м/с (806 км/ч)	199 м/с (716 км/ч)	12%
Плотность среды	1.3 кг/м ³	1.24 кг/м ³	5%
Скорость циркуляции	—	68.87 м/с	—

РЕЗУЛЬТАТЫ

Прохождение турбулентной зоны



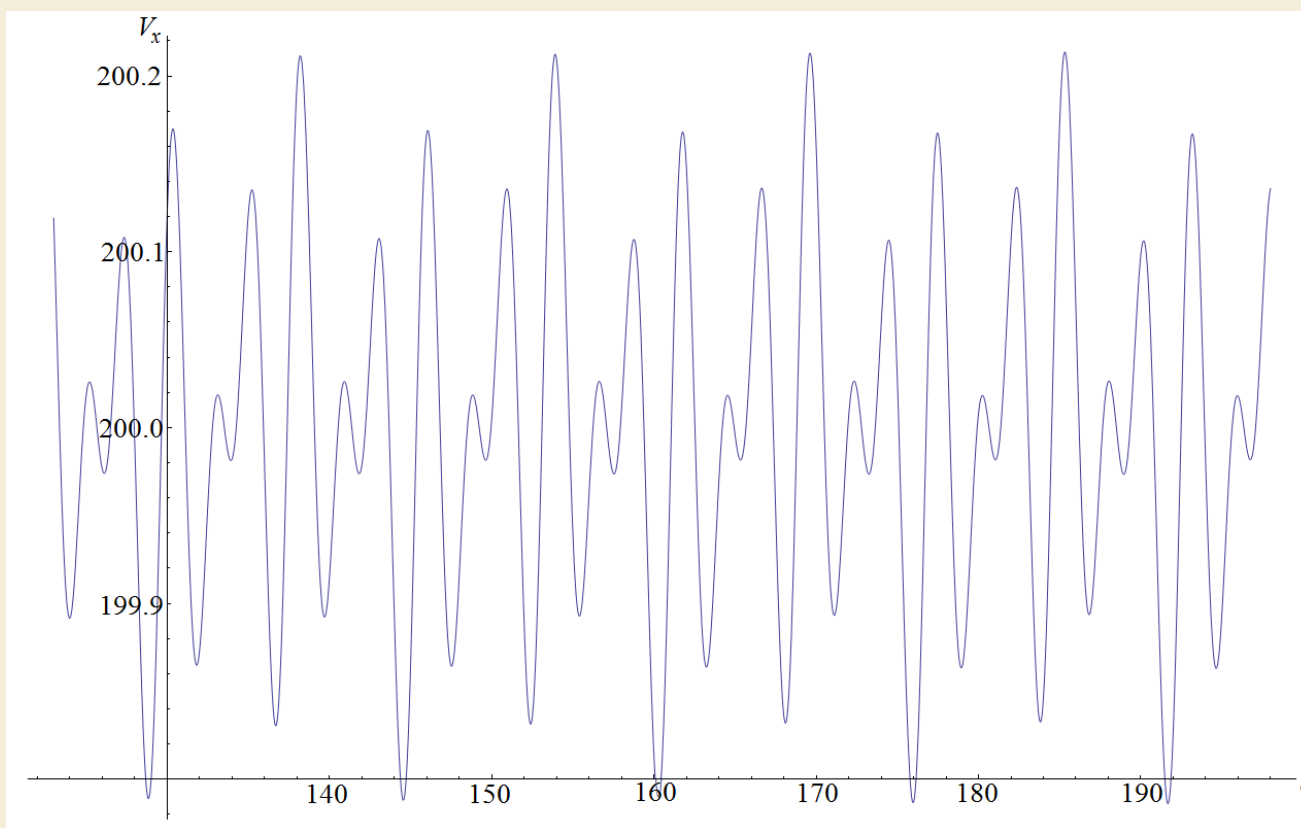
Колебания высоты при прохождении турбулентной зоны



Зависимость $X(t)$ при прохождении зоны турбулентности

РЕЗУЛЬТАТЫ

Прохождение грозового облака



Резкие изменения скорости, вызванные встречными периодическими порывами ветра