

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Волегов Павел Сергеевич,
к.ф.-м.н., доцент ПНИПУ*



ВВЕДЕНИЕ

Процесс теплопроводности

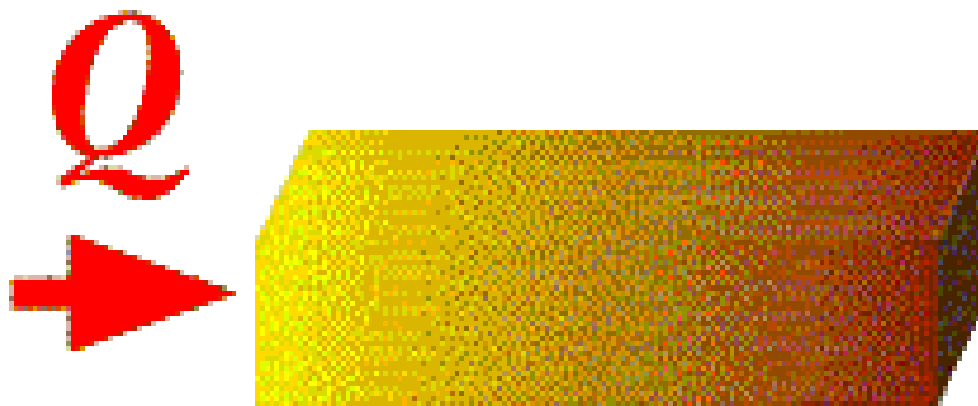


Рис.1 Распространение
теплоты в бруске



АКТУАЛЬНОСТЬ

- Данная работа актуальна для многих отраслей промышленности, в том числе – для теплоэнергетики.



Рис.2 Теплоэнергетика



ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Цель:

Разработка математической модели процесса теплопроводности с учетом различных граничных и начальных условий.

Задачи:

- 1) Сформулировать концептуальную постановку задачи моделирования.
- 2) Записать основной закон Фурье.
- 3) Вывести уравнение теплопроводности.
- 4) Решить задачу численным методом.
- 5) Исследовать распространение тепла при задании различных граничных условий.



КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

○ Гипотезы:

- 1) При нагреве не происходит деформации пластины.
- 2) Среда, в которой распространяется тепло, однородна.
- 3) Внутренние источники теплоты отсутствуют

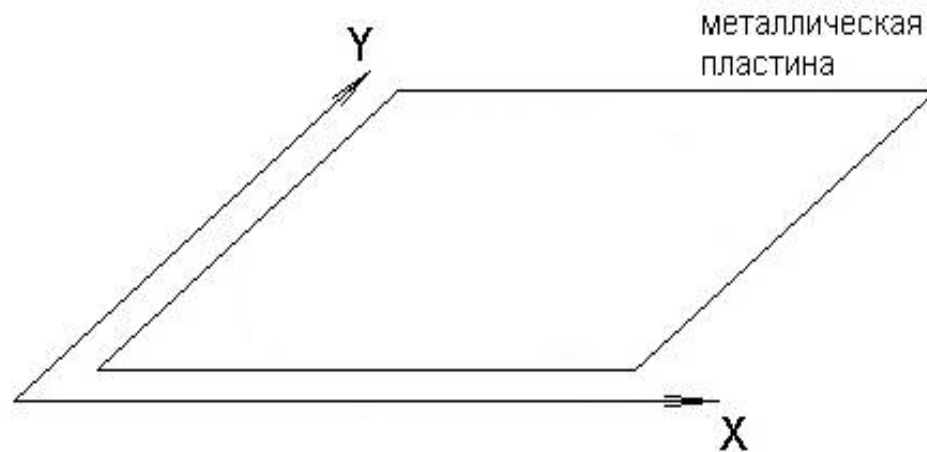


Рис. 2 Объект исследования



ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ

Плотность теплового потока

$$\mathbf{q} = - \mathbf{n} \frac{dQ}{dt} \frac{1}{S}$$

Закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$



УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Согласно закону сохранения энергии:

$$q_x dydz - q_{x+dx} dydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Так как $q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$, $\Rightarrow$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} x dx dy dz = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

Согласно закону Фурье

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \boxed{c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

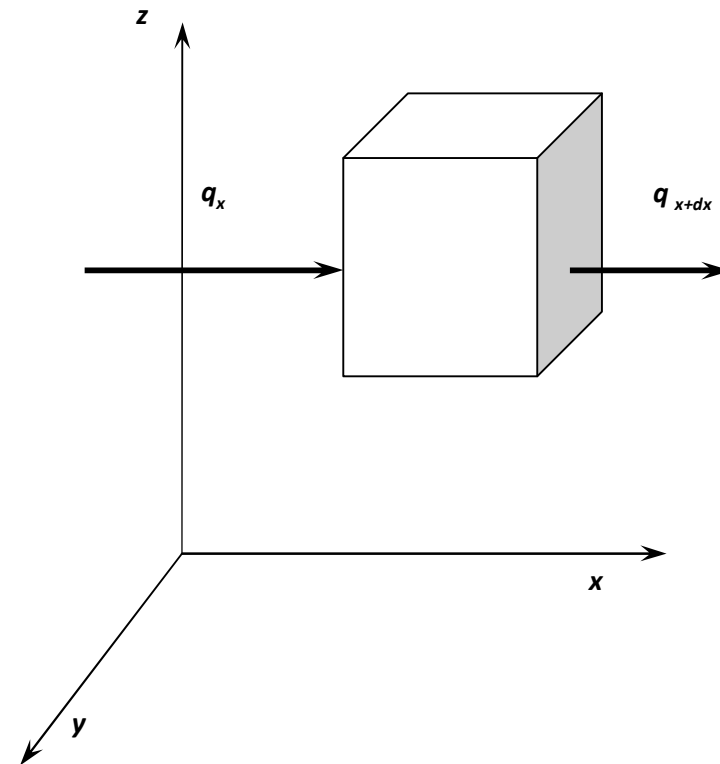


Рис.3 Схема баланса тепловых потоков в элементарном объеме

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

I-го рода

$$T(t, x, y, z) = T_1(t, x, y, z), \quad x, y, z \in \partial\Omega$$

II-го рода

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T(t, x, y, z) = -q_n(t, x, y, z), \quad x, y, z \in \partial\Omega_q$$

III-го рода

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T(t, x, y, z) = \alpha \left(T(t, x, y, z) - T_{\text{ср}} \right), \quad x, y, z \in \partial\Omega_\alpha$$


ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$$

Трехслойная схема Рундсона

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\tau} = \eta \frac{u_{j-1}^i - 2u_j^i + u_{j+1}^i}{h^2} + \eta \frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_j^{i-1} + u_{j+1}^{i-1}}{h^2}$$

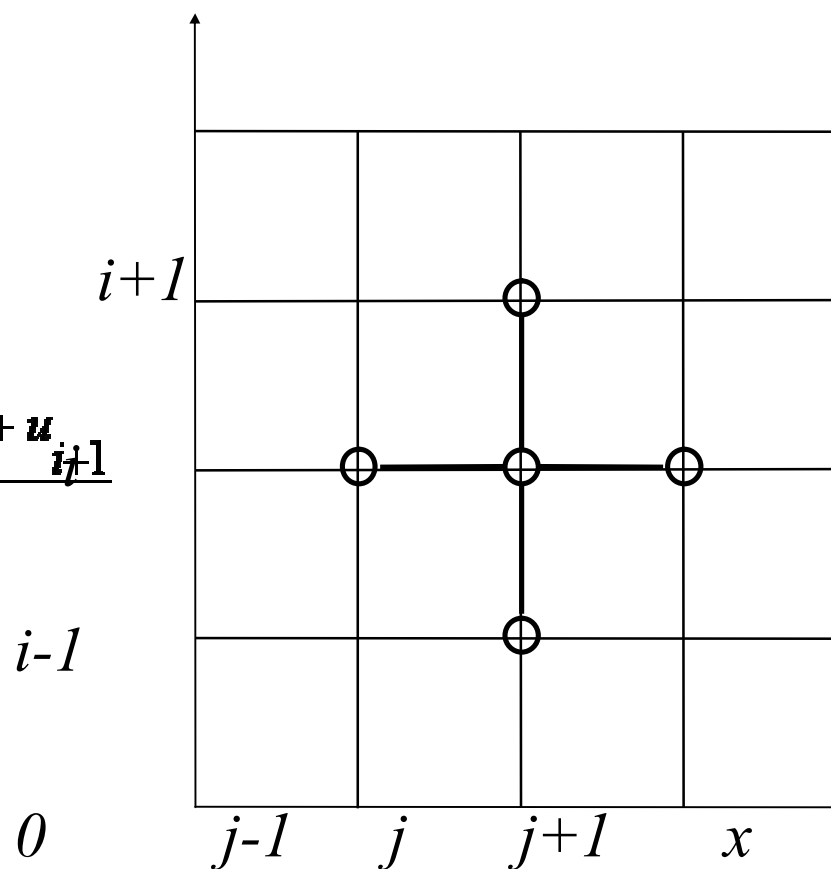


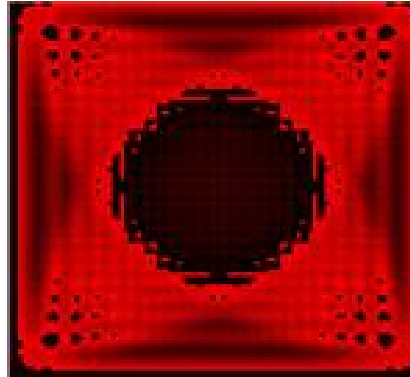
Рис. 4 Пятиточечный шаблон разностной схемы Рундсона

РЕЗУЛЬТАТЫ

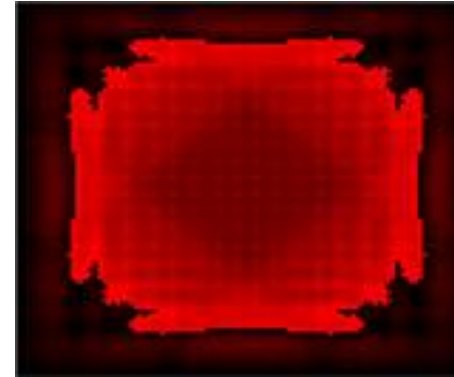
1 опыт



Нач. момент



спустя 15 сек.

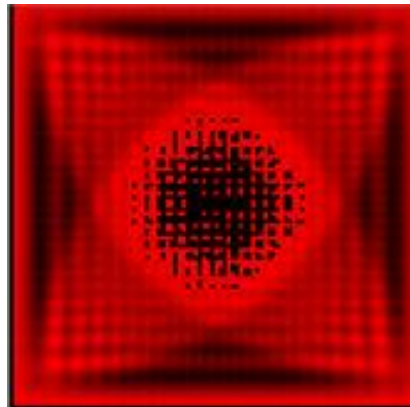


Спустя 30 сек.

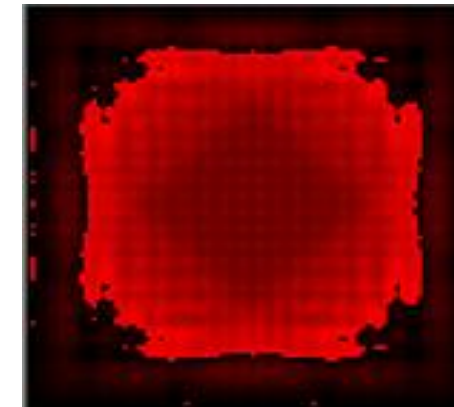
Рис.5 распределение температуры при задании граничных условий 1го рода



Нач. момент



спустя 15 сек.

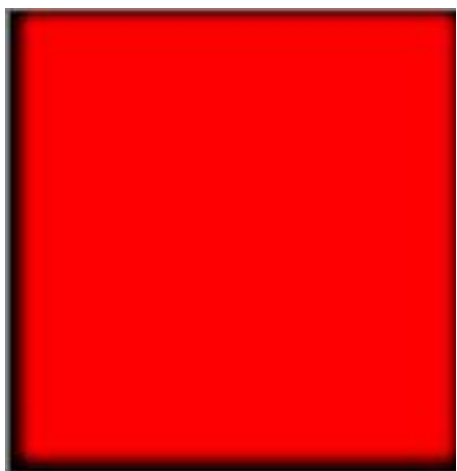


Спустя 30 сек.

Рис.6 распределение температуры при задании граничных условий 2го рода



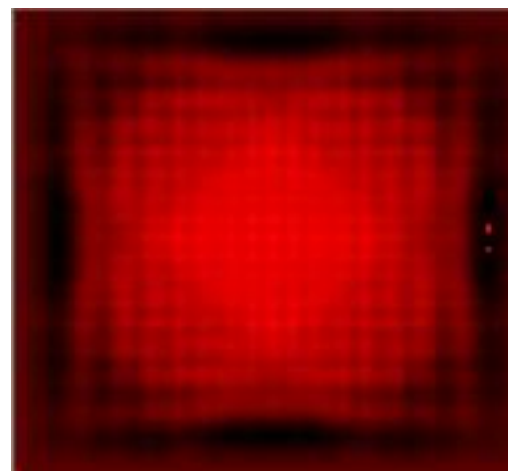
РЕЗУЛЬТАТЫ



Нач. момент



спустя 15 сек.



Спустя 30 сек.

Рис.7 распределение температуры при задании граничных условий 3го рода



РЕЗУЛЬТАТЫ

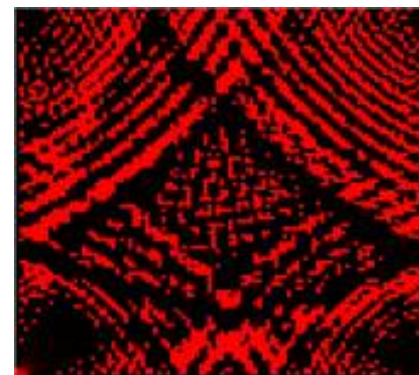
○ 2 опыт



Нач. момент



спустя 15 сек.

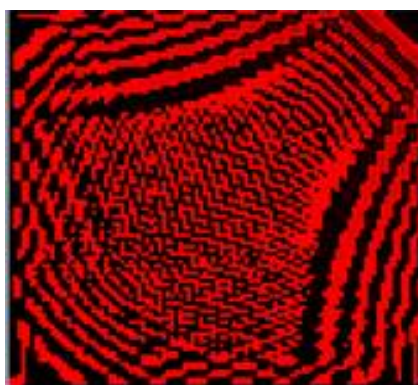


Спустя 30 сек.

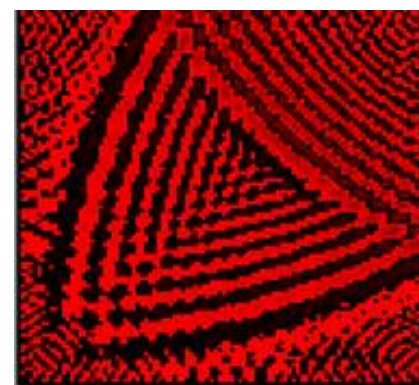
Рис.8 распределение температуры при задании граничных условий 1го рода



Нач. момент



спустя 15 сек.



Спустя 30 сек.

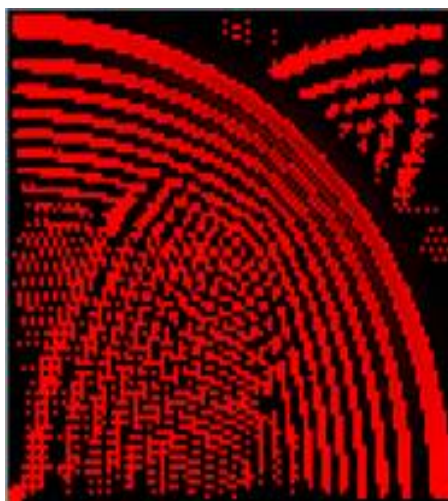
Рис.9 распределение температуры при задании граничных условий 2го рода



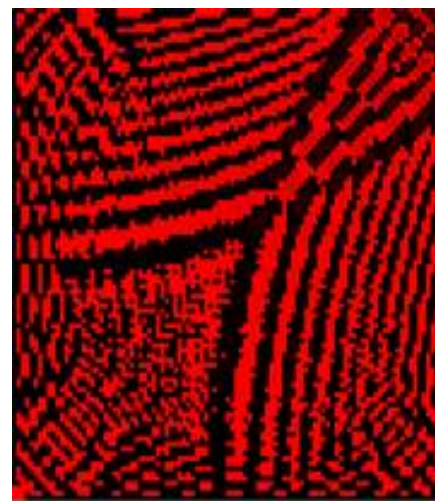
РЕЗУЛЬТАТЫ



Нач. момент



спустя 15 сек.



Спустя 30 сек.

Рис.10 распределение температуры при задании граничных условий 3го рода



ВЫВОД

- Рассмотрена задача нестационарной теплопроводности
- Задача была решена численно с помощью Трехслойной схемы Ричардсона
- Максимальная температура была зарегистрирована в 2 опыте при задании граничных условий 1го рода(300 K)
- Минимальная температура была зарегистрирована в 2 опыте при задании граничных условий 2го рода(293.15 K)

