Краевая предметная олимпиада по математике

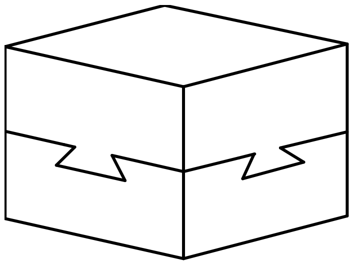
для учащихся г. Перми и Пермского края. 10 класс

Здесь приведены решения заданий первой части. Следует отметить, что многие задания имеют несколько вариантов решений – здесь дан лишь один из возможных вариантов.

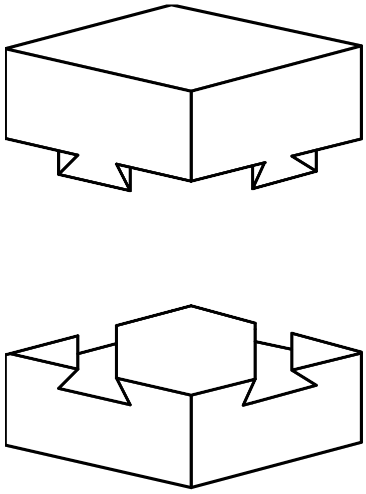
Часть 1

Задание 1. (5 б.)

Две детали соединены в куб. Верхняя деталь имеет выступы в виде ласточкина хвоста, входящие в пазы нижней детали. Как соединили эти детали? Нарисуйте вид сверху или опишите способ соединения словесно.



Ответ: В разобранном виде детали изображены на рис. (один из возможных случаев). В качестве верных ответов принимались словесные описания или виды сверху, из которых было ясно, что пазы (или выступы) должны быть параллельны друг другу (или параллельны диагонали) и т.д.



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y=\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}$.

Ответ: $(1;2]$.

Решение: Выделим целую часть: $y=\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+5}=1+\dfrac{1}{(x-2)^2+1}$.

Оценим выражения: $(x-2)^2\in[0;+\infty)$, $(x-2)^2+1\in[1;+\infty)$, $\dfrac{1}{(x-2)^2+1}\in(0;1]$, $y\in(1;2]$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $x+x\cdot\sqrt[3]{28-x^3}+\sqrt[3]{28-x^3}=7$ на множестве рациональных чисел.

Ответ: $\{1;3\}$.

Решение: Введем новую переменную $t=\sqrt[3]{28-x^3}$, тогда $x^3+t^3=28$. Исходное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases}x+xt+t=7,\\ x^3+t^3=28,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+t=7-xt,\\ (x+t)((x+t)^2-3xt)=28.\end{cases}$$

Введем переменные $x=x+t$, $y=xt$, тогда

$$\begin{cases} z = 7 - y, \\ z(z^2 - 3y) = 28, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - y, \\ z(z^2 - 21 + 3z) = 28, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - y, \\ z^3 + 3z^2 - 21z + 28 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 - y, \\ (z-4)(z^2 + 7z + 7) = 0. \end{cases}$$

Многочлен $z^2 + 7z + 7$ не имеет рациональных корней, следовательно $z = 4$, $y = 3$. Откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Задание 4. (12 б.)

В треугольнике стороны равны 9, 13 и *a*. Найдите все значения *a*, при которых треугольник будет тупоугольным.

Ответ: $(4;2\sqrt{22}) \cup (5\sqrt{10};22)$.

Решение: Для того, чтобы треугольник существовал, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} 9 + 13 > a, \\ 9 + a > 13. \Leftrightarrow a \in (4;22). \\ a + 13 > 9, \end{cases}$$

Тупой угол может находиться напротив стороны a (обозначим его α) или 13 (обозначим его β).

1 случай. По Теореме косинусов: $\cos\alpha = \dfrac{(9^2 + 13^2) - a^2}{2 \cdot 9 \cdot 13} = \dfrac{250 - a^2}{234}$. Так как угол тупой, $\cos\alpha < 0$, тогда $250 - a^2 < 0$, откуда $a \in \left(-\infty;-5\sqrt{10}\right) \cup \left(5\sqrt{10};+\infty\right)$. С учетом условия существования треугольника, $a \in \left(5\sqrt{10};22\right)$.

2 случай. Аналогично, $\cos\beta = \dfrac{(9^2 + a^2) - 13^2}{2 \cdot 9 \cdot a} = \dfrac{88 - a^2}{18a} < 0$, откуда $a \in \left(-\infty;-2\sqrt{22}\right) \cup \left(0;2\sqrt{22}\right)$. С учетом условия существования треугольника, $a \in \left(4;2\sqrt{22}\right)$.

Задание 5. (10 б.)

При каких значениях *a* выражение $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ имеет смысл при любых значениях x?

Ответ: $[1;\infty)$.

Решение: выражение существует, если $(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \ge 0$, что возможно только если

$$\begin{cases} a + 1 > 0, \\ D = 4(a-1)^2 - 12(a^2 - 1) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 > 0, \\ -8(a-1)(a-2) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ a \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty). \end{cases}$$

Откуда $a \ge 1$.

Задание 6. (13 б.)

Найдите значения, которые может принимать сумма квадратов действительных различных корней уравнения $x^2 + 3kx + 3k^2 - 3k - 15 = 0$.

Ответ: $\left[27;126 + 36\sqrt{6}\right)$.

Решение: Дискриминант $D = 9k^2 - 4(3k^2 - 3k - 15) = -3k^2 + 12k + 60$ должен быть положительным, значит $k \in \left(2 - 2\sqrt{6};2 + 2\sqrt{6}\right)$. Найдем сумму квадратов корней уравнения, использую теорему Виета:

$$f(k) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9k^2 - 2(3k^2 - 3k - 15) = 3k^2 + 6k + 30.$$

Это квадратичная функция с минимумом в точке $(-1;27)$. Учитывая, что $f(2-2\sqrt{6})=136-6\sqrt{6}$, $f(2+2\sqrt{6})=136+6\sqrt{6}$, наибольшее значение функции равно $136+6\sqrt{6}$. Таким образом, $f(k)\in\left[27;126+36\sqrt{6}\right)$.

Далее приведены решения заданий частей 2 и 3. Верные ответы подчеркнуты

Часть 2

1. Даны два числа $a = \sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \mathrm{tg}\, 4$ и $b = \cos 5$. Тогда можно утверждать, что

А) $a > b$ Б) $a < b$ <u>В) $a < 0$, $b > 0$</u>

Поскольку $2 \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $3 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, $4 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, $5 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, имеют место неравенства $\sin 2 > 0$, $\cos 3 < 0$ и $\mathrm{tg}\, 4 > 0$. Таким образом $a < 0$, $b = \cos 5 > 0$.

2. Найдите углы ромба, если его периметр в восемь раз больше высоты.

<u>А) 30° и 150°</u> Б) 60° и 120° В) 45° и 135°

Поскольку стороны ромба равны, $p = 4a = 8h$, откуда $a = 2h$, т.е. высота в 2 раза меньше стороны. Если катет в 2 раза меньше гипотенузы, то он лежит напротив угла в 30^0. Второй угол равен 180°-30°=150°

3. За границу поехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языка. 35 знали немецкий язык. 73 человека знали французский. Сколько туристов владело обоими иностранными языками?

А) 21 <u>Б) 18</u> В) 14

В данной группе знают иностранные языки 100-10=90 человек. При этом в сумме знающих французский или немецкий 35+73=108 человек, значит 108-90=18 человек знают оба языка.

4. Если в данном трехзначном числе первую цифру переставить на последнее место, то получиться новое трехзначное число. Сумма этих чисел равна 563, а разность 279. Тогда сумма цифр любого из этих чисел равна

<u>А) 7</u> Б) 5 В) 8

Пусть x и y – заданные числа. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 563, \\ x - y = 279. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 842, \\ x - y = 279. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 421, \\ y = 142. \end{cases}$$

Сумма цифр каждого из них равна 7.

5. Для функции $y = \sqrt{3 - x}$ верным высказыванием является:

А) функция существует при всех значениях x;

Б) функция всегда положительна;

<u>В) функция убывает.</u>

Данная функция существует только при $3 - x \geq 0$, т.е. при $x \leq 3$. Она всегда неотрицательна и убывает на всей области определения.

6. У хозяйки есть две банки для крупы. У одной квадратное дно 10х10см и высота 19см, а у другой круглое дно с радиусом 6см и высотой 18см. В какую банку войдет больше крупы?

А) в первую Б) во вторую В) одинаково

Найдем объемы банок: $V_1 = 10 \cdot 10 \cdot 19 = 1900$ см^3, $V_2 = \pi 18 \cdot 6 \cdot 6 \approx 2035$ см^3. Второе значение больше, значит во вторую банку войдет больше крупы.

7. Вычислите сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.

А) 482 Б) 712 В) 638

Найдем сумму кубов некоторых чисел a и b, если $a+b=11$, $ab=21$:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3ab)=11(11^2-3\cdot 21)=638.$$

Часть 3

8. Выражение $\sqrt{17-12\sqrt{2}}\left(6+4\sqrt{2}\right)$ равно

А) $\sqrt{2}$ Б) -2 В) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ Г) 2

В выражении $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ выделим полный квадрат:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{3^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{2}\right|.$$

Поскольку $3>2\sqrt{2}$, значит $\left|3-2\sqrt{2}\right|=3-2\sqrt{2}$. Тогда

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}\left(6+4\sqrt{2}\right)=\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot2\left(3+2\sqrt{2}\right)=2\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)=2.$$

9. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Чему равен косинус наименьшего угла такого треугольника?

А) 0,6 Б) 0,8 В) 0,5 Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Стороны составляют пифагорову тройку: 3, 4, 5 (или пропорциональны ей). Следовательно, косинусы острых углов равны 0,6 и 0,8. Меньший угол имеет больший косинус.

10. Один купец из Чувашии в XIX веке торговал яйцами. Он покупал у крестьян яйца по цене гривна (10 копеек) за десяток и продавал в Голландии по цене 1 рубль за десяток. Дорога обходилась 100 рублей в одну сторону. 10% яиц разбивалось при перевозке. Какое наименьшее количество десятков яиц надо собрать, чтобы торговать с прибылью?

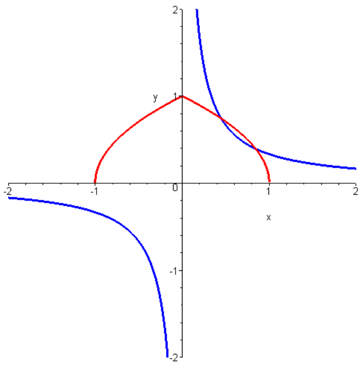
А) 566 Б) 281 В) 700 Г) 251

Пусть купец собрал x десятков яиц. Убыток складывается из стоимости разбиты яиц и затрат на перевозку $0.1x+200$. Прибыль равна 90 копеек за десяток яиц, тогда чтобы прибыль превысила убыток, должно выполняться неравенство $0.1x+200<0{,}9x$, откуда $x>250$. То есть надо закупить минимум 251 десяток яиц.

11. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{1-|x|}=\dfrac{1}{3x}$?

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) ни одного.

Так как графики функций $y=\sqrt{1-|x|}$ и $y=\dfrac{1}{3x}$ (см рис.) имеют две точки пересечения, уравнение имеет два корня.



12. Функция $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+4}}\left(3-\frac{6x-6}{x}\right)$

А) на всей области определения постоянна;

Б) на промежутке $\left(2;+\infty\right)$ равна –3;

В) монотонно убывает;

Г) в точке $x=2$ терпит разрыв.

Произведем преобразования:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+4}}\left(3-\frac{6x-6}{x}\right)=\frac{x}{\sqrt{\left(x-2\right)^2}}\left(\frac{-3x+6}{x}\right)=\frac{3x(2-x)}{\left|x-2\right|x}.$$

Заметим, что область определения данной функции $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Раскроем модуль: $y=\begin{cases}-3, x>2,\\ 3, x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;2\right).\end{cases}$ Функция не является монотонно возрастающей или убывающей, поскольку является кусочно-постоянной.

13. При каком значении параметра a расстояние от вершины параболы $y=x^2-12x+a+36$ до начала координат будет равно 10?

А) 8 Б) 4 В) 6 Г) –8

Выделим полный квадрат: $y=x^2-12x+a+36=(x-6)^2+a$. Значит вершина параболы расположена в точке с координатами $\left(6;a\right)$. Расстояние от вершины до начала координат определяется по теореме Пифагора: $6^2+a^2=10^2$, откуда $a=\pm 8$.

14. Сумма большего и меньшего корней уравнения $\left|x-2\right|+\left|x+2\right|=6$ равна:

А) -1 Б) 0 В) -4 Г) 4

В данном задании содержалась опечатка. Вместо «сумма» в задании стояло «частное». В этом случае среди ответов не выло верного. Здесь приведен исправленный вариант задания.

Решим уравнение. При $x<-2$ раскрывая модули получим $2-x-x-2=6$, откуда $x=-3$. При $x\in\left[-2;2\right]$ получаем $2-x+x+2=4\neq 6$, т.е. на этом отрезке уравнение не имеет корней. При $x>2$ имеем $x-2+x+2=6$, откуда $x=3$. Таким образом, корни уравнения равны ± 3, их сумма равна нулю.