Краевая предметная олимпиада по математике

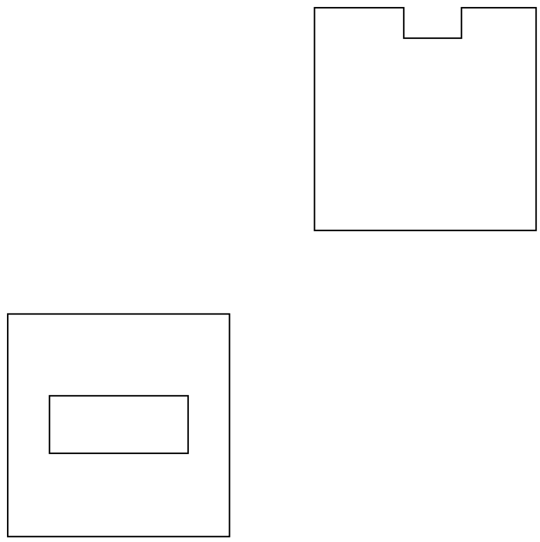
для учащихся г. Перми и Пермского края. 11 класс

Здесь приведены решения заданий первой части. Следует отметить, что многие задания имеют несколько вариантов решений – здесь дан лишь один из возможных вариантов.

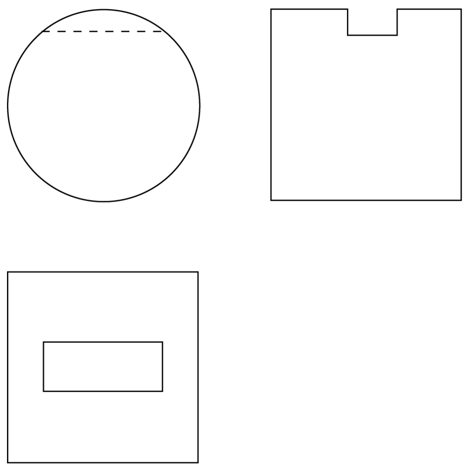
Часть 1

Задание 1. (6 б.)

На рисунке приведен вид сверху и вид сбоку некоторой детали. Может ли существовать такая деталь? Если вы считаете, что такая деталь существует, начертите недостающий вид спереди.



Ответ: Данная деталь существует. Один из вариантов недостающего вида спереди приведен на рис. Конфигураций такой детали может быть несколько, но верхняя часть детали обязательно должна быть закруглена.



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y=\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arcctg}(0{,}125(2\sin x-2\sqrt{3}\cos x-4))-3$.

Ответ: $[-1;0]$.

Решение: преобразуем функцию, используя формулу дополнительного аргумента:

$$y=\frac{4}{\pi}\operatorname{arcctg}(0{,}125(2\sin x-2\sqrt{3}\cos x-4))-3=\frac{4}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2}\right)-3.$$

Оценим выражения: $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1;1]$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\in[-2;0]$, $\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2}\in[-1;0]$,

$\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2}\right)\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$, $\frac{4}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2}\right)\in[2;3]$, $y\in[-1;0]$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$.

Ответ: $\{5;6;7\}$

Решение: Введем переменные $z=\sqrt[3]{7-x}$, $t=\sqrt[3]{x-5}$. Тогда $z^3-t^3=2(6-x)$. Получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{z-t}{z+t}=\dfrac{z^3-t^3}{2},\\ z^3+t^3=2,\end{cases}$$

Т.к. $z\neq -t$, получаем $\begin{cases}2(z-t)=(z-t)(z+t)(z^2+zt+t^2),\\ (z+t)(z^2-zt+t^2)=2.\end{cases}$

Если $z=t$, то $7-x=x-5\Leftrightarrow x=6$.

Далее $\begin{cases}(z+t)(z^2+zt+t^2)=2,\\ (z+t)(z^2-zt+t^2)=2,\end{cases}$ откуда $zt=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7-x=0,\\ x-5=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=5.\end{array}\right.$

Задание 4. (10 б.)

В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a. Из конца K диаметра KP, параллельного стороне AB, сторона BC видна под углом 2β. Найти радиус окружности.

Ответ: $R=\dfrac{a}{2|\cos 2\beta|}$

Решение: $\angle BKC=\angle BAC=2\beta$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда из прямоугольного ΔABC имеет $AC=2R=\dfrac{AB}{|\cos 2\beta|}\Rightarrow R=\dfrac{a}{2|\cos 2\beta|}$.

Задание 5. (12 б.)

Найдите все значения α, где $\alpha\in[0;2\pi)$, при каждом из которых система $\begin{cases}x^2+(y+4\sqrt{2})^2=16,\\ (x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2=1\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\alpha\in\left[\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Решение: первому уравнению соответствует окружность с центом в точке $\left(0;-4\sqrt{2}\right)$ и радиусом 4, второму – окружность с центом в точке $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ и радиусом 1. Расстояние между центрами этих окружностей равно $h=\sqrt{(\sin\alpha+4\sqrt{2})^2+\cos^2\alpha}$. Окружности будут пересекаться, если это расстояние будет не больше суммы радиусов окружности, т.е.

$$(\sin\alpha + 4\sqrt{2})^2 + \cos^2\alpha \le 5^2,$$

$$\sin^2\alpha + 8\sqrt{2}\sin\alpha + 32 + \cos^2\alpha \le 25,$$

$$8\sqrt{2}\sin\alpha \le -8,$$

$$\sin\alpha \le -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

С учетом того, что $\alpha \in [0;2\pi)$, получаем $\alpha \in \left[\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Задание 6. (12 б.)

Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной 2. Боковое ребро параллелепипеда равно 5. Через отрезок, соединяющей две точки на противоположных концах основания и параллельный двум другим сторонам основания, проведена плоскость, отсекающая от параллелепипеда треугольную призму с периметром основания, равным 8. Найдите наименьшее значение объема оставшейся части параллелепипеда.

Ответ: $\frac{44}{3}$.

Решение: пусть y - длина отрезка, отсекаемого плоскостью на стороне основания, x - на высоте параллелепипеда. Тогда основание призмы – треугольник со сторонами x, y и $\sqrt{x^2+y^2}$, его периметр $P = \sqrt{x^2+y^2} + x + y = 8$, откуда

$$x^2 + y^2 = 64 - 16(x+y) + (x+y)^2,$$

$$64 - 16(x+y) + 2xy = 0,$$

$$32 - 8x - 8y + xy = 0,$$

$$x(y-8) = 8(y-4),$$

$$x = \frac{8(y-4)}{(y-8)}.$$

Объем треугольной призмы равен $V_{призмы} = \frac{1}{2}xy\cdot 2 = xy = \frac{8y(y-4)}{(y-8)}$, тогда объем оставшейся части параллелепипеда равен $V(y) = 20 - \frac{8y(y-4)}{(y-8)}$. При этом $y \in [0;2]$.

Исследуем данную функцию с помощью производной: $V'(y) = -\frac{8(y^2 - 16y + 32)}{(y-8)^2}$.

Нули производной: $8 \pm 4\sqrt{2}$, оба эти значения выходят за пределы рассматриваемого отрезка. На отрезке $y \in [0;2]$ производная отрицательна, значит функция $V(y)$ на данном отрезке монотонно убывает. Наименьшее значение объема достигается при $y = 2$ и равно 44/3.

Далее приведены решения заданий частей 2 и 3. Верные ответы подчеркнуты

Часть 2

1. Выражение $2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$ равно

А) 3,2 Б) <u>2,3</u> В) 2,5

Выражение $2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$ раскладывается на сумму двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий, с единичными первыми членами и знаменателями $q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=-\frac{1}{4}$. Тогда $S_1=\frac{b}{1-q_1}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$, $S_2=\frac{b}{1-q_2}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$, и окончательный ответ $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}=2,3$.

2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}\sin^2\pi x=0$?

А) 4 Б) <u>5</u> В) ∞

$\sqrt{4-x^2}\sin^2\pi x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 4-x^2=0, \\ \sin\pi x=0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-2;2], \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 2, \\ x=n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{\pm 2;\pm 1,0\}$. Т.е. уравнение имеет пять корней.

3. Даны функции $y_1=x-1$, $y_2=\sqrt{(x-1)^2}$, $y_3=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$. Можно утверждать, что:

А) графики всех функций совпадают;

Б) графики первой и третьей функции совпадают;

<u>В) графики всех функций различны</u>.

У первой и второй функций областью определения $(-\infty;+\infty)$, у третей – $[1;+\infty)$. После преобразования $y_1=x-1$, $y_2=|x-1|$, $y_3=x-1$. Таким образом, графики всех функций различны.

4. (задача Наполеона) Одно из семи чудес света – египетские пирамиды. Самая знаменитая из них – пирамида Хеопса высотой 147 м, в основании которой квадрат со стороной 233 м. Если из каменных блоков пирамиды возвести стену толщиной 20 см вокруг Франции, то какова будет высота этой стены? (справка: общая длина границ Франции примерно 5000 км)

<u>А) ≈266 см</u> Б) ≈0,89 м В) ≈7м 98 см

Объем пирамиды $V_n = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}233^2 147 = 2660161$ м^3 равен объему стены $V_{стены} = SH = 0{,}2 \cdot 5000000H = 1000000H$, откуда $H = \frac{2660161}{1000000} \approx 266$ см.

5. В ящике 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

А) 15 <u>Б) 75</u> В) 80

Чтобы среди вытащенных оказалось не менее 15 шариков одного цвета, надо достать все шарики желтого, белого и черного цветов, и по 14 шариков красного, зеленого и синего цвета. Тогда любой следующий шарик, вынутый из ящика, будет иметь либо красный, либо зеленый, либо синий цвет и станет 15-тым шариком соответствующего цвета. Таким образом, количество шариков: (14 + 14 + 12 + 14 + 10 + 10) + 1 = 75.

6. Разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = x + \frac{49}{x}$ на отрезке [4;8] равна:

<u>А)</u> $\frac{9}{4}$ Б) $\frac{7}{8}$ В) $\frac{1}{8}$

Производная функции $f'(x) = 1 - \frac{49}{x^2} = \frac{(x-7)(x+7)}{x^2}$, значит функция возрастает при $x \in (-\infty;-7) \cup (7;\infty)$ и убывает при $x \in (-7;0) \cup (0;7)$. При $x = 7$ данная функция достигает минимального значения $f(7) = 14$. Наибольшее значение ищем на границах отрезка: $f(4) = 4 + \frac{49}{4} = 16\frac{1}{4}$, $f(8) = 8 + \frac{49}{8} = 14\frac{1}{8}$. Таким образом, наибольшее значение равно $16\frac{1}{4}$, а разность наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке: $16\frac{1}{4} - 14 = \frac{9}{4}$.

7. Значение выражения $\frac{|\operatorname{tg}(\cos\pi)|}{\operatorname{tg}(\cos\pi)} + \frac{2|\cos(\sin 5)|}{\cos(\sin 5)} + \frac{4|\operatorname{ctg}(\cos 4)|}{\operatorname{ctg}(\cos 4)}$ равно

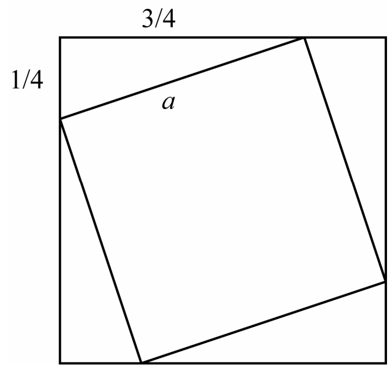
<u>А) –3</u> Б) 7 В) 3

Выясним знаки выражений, стоящих под модулями: $\operatorname{tg}(\cos\pi) = \operatorname{tg}(-1) < 0$, $\sin 5 \in (-1;0) \Rightarrow \cos(\sin 5) > 0$, $\cos 4 \in (-1;0) \Rightarrow \operatorname{ctg}(\cos 4) < 0$. Следовательно, первая дробь равна –1, вторая 2, третья –4. Выражение равно –3.

Часть 3

8. В квадрат с единичной стороной вписан еще один квадрат так, что его вершины делят стороны первого квадрата в отношении 1:3. Во второй квадрат аналогичным образом вписан третий и т.д. Сумма площадей всех таких квадратов равняется

А) ∞ Б) $\frac{5}{3}$ В) $\frac{8}{3}$ Г) $\frac{9}{4}$



Найдем сторону второго квадрата (см. рисунок) по теореме Пифагора: $a_2 = \frac{1}{4}\sqrt{1+3^3} = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Тогда его площадь $S_2 = a^2 = \frac{10}{16}$. Нетрудно догадаться, что площади всех квадратов будут образовывать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем $\frac{10}{16}$. Сумма такой прогрессии равна $\frac{1}{1-\frac{10}{16}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.

9. Наибольший корень уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ равен

А) π Б) $\frac{5\pi}{3}$ В) $\frac{3\pi}{2}$ Г) $\frac{\pi}{2}$

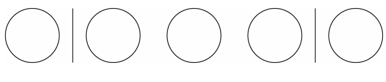
Решением уравнения $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$ является $5x = 3x + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, откуда $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Наибольшим из корней на промежутке $[0; 2\pi]$ является корень $\frac{3\pi}{2}$.

10. Сколькими способами трое пиратов могут разделить между собой пять монет, так чтобы каждый получил хотя бы одну монету?

А) 12 Б) 10 В) 6 Г) 8

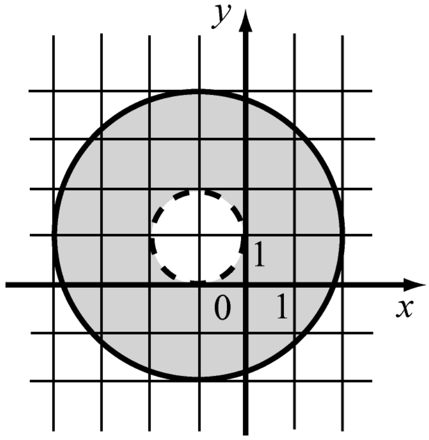
Любой возможный способ дележа монет можно изобразить следующим образом:



Здесь «перегородка» означает, сколько монет достанется каждому из пиратов (в данном случае, первому – 1, второму – 3, третьему – 1). Все возможные варианты дележа золота определяются количеством вариантов расположения двух «перегородок» на четырех возможных местах, т.е. числом сочетаний из 4 по 2: $C_4^2 = 6$. Тот же ответ можно получить простым перебором вариантов расстановки «перегородок».

11. На рисунке изображено решение системы неравенств

<u>А)</u> $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2>1,\\(x+1)^2+(y-1)^2\le 9.\end{cases}$



<u>Б)</u> $\begin{cases}x^2+y^2+2(x-y)>-1,\\x^2+y^2+2(x-y)\le 7.\end{cases}$

В) $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2>1,\\(x+1)^2+(y-1)^2\le 3.\end{cases}$

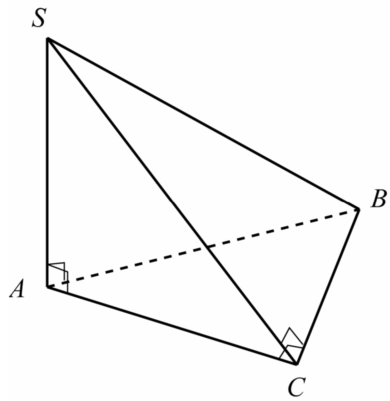
Г) $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2<1,\\(x+1)^2+(y-1)^2\ge 9.\end{cases}$

Уравнение окружности с центром в точке (x_0,y_0) и радиусом r имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. На рисунке изображена область, находящаяся вне окружности радиуса 1 с центром в точке $(-1;1)$ (которой соответствует неравенство $(x+1)^2+(y-1)^2>1$), и внутри окружности радиуса 3 с центром в той же точке (неравенство $(x+1)^2+(y-1)^2\le 9$). То есть правильный ответ – А. Система Б получается из системы А после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

12. Сколько прямоугольных треугольников может быть среди граней треугольной пирамиды?

<u>А) 1</u> <u>Б) 2</u> <u>В) 3</u> <u>Г) 4</u>

Все ответы верны. Приведем примеры для каждого из случаев.
А) В основании пирамиды прямоугольный треугольник, ни одно из ребер не перпендикулярно плоскости основания.
Б) В основании пирамиды треугольник, не содержащий прямых углов, одно из ребер перпендикулярно плоскости основания.
В) В основании пирамиды прямоугольный треугольник, ребро, опирающееся на вершину прямого угла, перпендикулярно плоскости основания.
Г) В основании пирамиды прямоугольный треугольник ($\angle C$ – прямой), ребро SA, опирающееся на вершину острого угла, перпендикулярно плоскости основания. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC\perp BC$. Таким образом, все грани пирамиды являются прямоугольными треугольниками.



13. В какой точке касательная, поведенная к графику функции $y=x^2-2x+1$, параллельна прямой $y=-4x-4$?

А) A(-1;1/4) Б) B(1;1/4) В) C(0;4) <u>Г) E(-1;4)</u>

Производная функции $y = x^2 - 2x + 1$ равна $y' = 2x - 2$. Угловой коэффициент должен быть равен касательной, параллельной прямой $y = -4x - 4$, должен быть равен -4. Тогда $2x - 2 = -4$ при $x = -1$, $y(-1) = 4$. Значит искомая точка E(-1;4).

14. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^2 - 4x - 5\right| = a$ имеет ровно три корня?

А) 2 Б) 9 В) 10 Г) таких a нет.

Изобразим решение уравнения графически (рис.). Три точки пересечения данные функции имеют при $a = 9$.