Краевая предметная олимпиада по математике

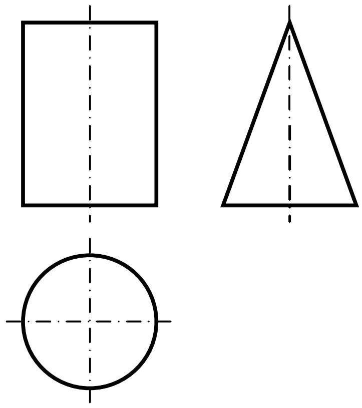
для учащихся г. Перми и Пермского края. 9 класс

Здесь приведены решения заданий первой части. Следует отметить, что многие задания имеют несколько вариантов решений – здесь дан лишь один из возможных вариантов.

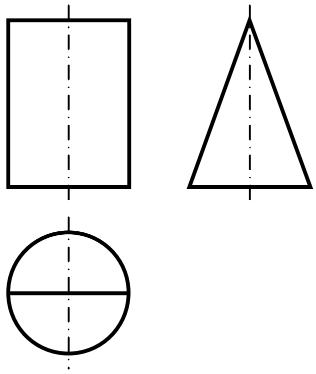
Часть 1

Задание 1. (6 б.)

На рисунке представлены три проекции некоторой детали. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует. Изобразите недостающие, по вашему мнению, линии на проекциях.



Ответ: Такая деталь существует, по форме она напоминает тюбик зубной пасты или крема. Не хватает линии на виде сверху:



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y = \dfrac{5}{2x^2 - 8x + 3} - 1$.

Ответ: $y \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$.

Решение: Выделим полный квадрат в знаменателе:

$y = \dfrac{5}{2(x^2 - 4x + 4) - 5} - 1 = \dfrac{5}{2(x-2)^2 - 5} - 1$.

Оценим выражения: $2(x-2)^2 \in [0; +\infty)$, $2(x-2)^2 - 5 \in [-5; +\infty)$. Так как данное выражение стоит в знаменателе: $2(x-2)^2 - 5 \in [-5; 0) \cup (0; +\infty)$. Тогда $\dfrac{5}{2(x-2)^2 + 5} \in (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$, $y \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $\dfrac{1}{(x^2 - 2x)^2 + 1} + \dfrac{2}{x^2 - 4x + 6} + \dfrac{3}{(x^2 - 3x + 2)^2 + 3} = 3$.

Ответ: 2

Решение: Выделим полный квадрат во второй дроби:

$$\frac{1}{(x^2-2x)^2+1}+\frac{2}{(x-2)^2+2}+\frac{3}{(x^2-3x+2)^2+3}=3.$$

Так как $(x^2-2x)^2+1\geq 1$, $(x-2)^2+2\geq 2$, $(x^2-3x+2)^2+3\geq 3$, каждая из дробей не меньше 1, значит каждая из дробей должна быть равна 1. Это возможно только при условии, что

$$\begin{cases} x^2-2x=0, \\ x-2=0, \\ x^2-3x+2=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

<u>Задание 4. (12 б.)</u>

Катеты прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $2x^2-10x+9=0$. Найдите отношение площадей кругов, описанного около этого треугольника и вписанного в него.

<u>Ответ</u>: 16

<u>Решение</u>: Пусть a и b - катеты треугольника. Тогда по Теореме Виета $ab=\frac{9}{2}$, $a+b=5$. Гипотенуза $c=\sqrt{(a+b)^2-2ab}=4$. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}ab=\frac{9}{4}$, полупериметр $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9}{2}$. Радиус вписанной окружности $r=\frac{S}{p}=\frac{1}{2}$. Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы $R=\frac{c}{2}=2$. Отношение радиусов $\frac{R}{r}=4$, значит отношение площадей равно 16.

<u>Задание 5. (12 б.)</u>

Найдите все значение *а*, при которых система $\begin{cases} ax+3y=a^2-a, \\ 2x+(a-1)y=3a-5 \end{cases}$ не имеет решений.

<u>Ответ</u>: -2

<u>Решение</u>:

$$\begin{cases} ax+3y=a^2-a, \\ 2x+(a-1)y=3a-5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=a^2-a-ax, \\ 6x+3y(a-1)=9a-15, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2ax+6y=2a^2-2a, \\ 2x=3a-5-(a-1)y, \end{cases}$$

После преобразований второе уравнение имеет вид:

$$x(a^2-a-6)=a^3-2a^2-8a+15 \text{ или } y(a^2-a-6)=3a-a^2,$$

после разложения на множители:

$$x(a+2)(a-3)=(a-3)(a^2+a-5) \text{ или } y(a+2)(a-3)=a(a-3).$$

При $a=3$ обе части уравнения тождественно равны нулю, значит корни – любые x. При $a=-2$ первое уравнение имеет вид $0\cdot x=15$, второе $0\cdot y=10$ и не имеют корней.

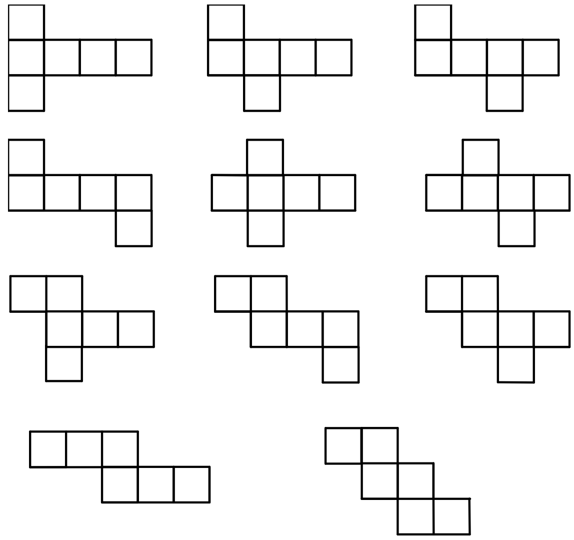
<u>Задание 6. (10 б.)</u>

Необходимо сварить стальной бак с верхней крышкой, имеющий форму куба со стороной a. Для этого из цельного стального листа вырезают развертку куба, затем развертку сгибают и сваривают швы бака. Какова минимальная площадь листа стали для изготовления развертки бака? Определите наиболее рациональные размеры стального листа, чтобы после вырезания развертки осталось минимальное количество отходов металла. Изобразите используемую при этом развертку куба. Найдите минимальную длину сварного шва.

<u>Ответ</u>:

- минимальная площадь листа - $10a^2$
- наиболее рациональный лист - $5a\times 2a$ (первая развертка в последнем ряду на рисунке)

- минимальная длина сварочного шва - $7a$



Решение: Всего существует 11 разверток куба (рисунок): шесть, в которых четыре грани расположены в одной полосе развертки; четыре развертки, в которых три грани в одной полосе, но нет четырех граней. Последняя развертка - ни в одной полосе нет трех граней. Для всех разверток, кроме пятой, размер листа для развертки $4a \times 3a$ и имеет площадь $12a^2$. Стальной лист для пятой развертки – $5a \times 2a$ имеет площадь $10a^2$. В этом случае будет минимальный отход металла. Длина сварного шва для всех случаев одинакова – $7a$.

Далее приведены решения заданий частей 2 и 3. Верные ответы подчеркнуты

Часть 2

1. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если длину увеличить на 20 %, а ширину на 10 %?

А) 30 % Б) 32 % В) 300 %

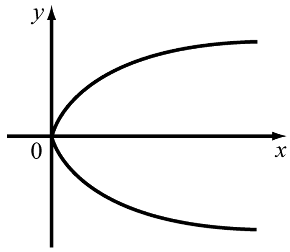
$S = 1{,}32x \cdot 1{,}1x = 1{,}32x^2$. На 32 %

2. На рисунке изображена

А) четная функция $y = f(x)$;

Б) нечетная функция $y = f(x)$;

В) линия, не являющаяся графиком функции $y = f(x)$.



По определению функции $y = f(x)$, каждому значению независимой переменной x, должно соответствовать единственное значения аргумента y. Данное условие здесь не выполняется, т.к. любому $x \in (0;+\infty)$ соответствует по два значения аргумента.

3. На турбазе 25 домиков, в которых отдыхают 70 человек, причем в больших домиках – по 4 человека, а в маленьких – по 2 человека. Сколько на турбазе больших домиков?

А) 15 Б) 10 В) 12

Пусть x - количество больших домиков, y - маленьких. Тогда можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ 4x + 2y = 70, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 15. \end{cases}$$

4. Сколько натуральных чисел из второй сотни (от 101 до 200 включительно) делится на 5, но не делится на 7?

А) 16 Б) 17 В) 15

На 5 во второй сотне делится каждое пятое число, начиная со 105, т.е. всего 20 чисел. Чтобы узнать, сколько среди них чисел, не делящихся на 7, надо удалить все числа, делящиеся и на 5, и на 7, т.е. делящиеся на 35. На 35 во второй сотне делится каждое 35 число, начиная также со 105, т.е. числа 105, 140, 175 - всего 3 числа. Значит делится на 5, но не делится на 7 во второй сотне 20 – 3 = 17 чисел.

5. В треугольнике со сторонами 2, 4 и $2\sqrt{3}$

А) один из углов равен 45°;

Б) площадь равна $2\sqrt{3}$;

В) радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}-1$.

Поскольку $\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2=4^2$, треугольник является прямоугольным, но не является равнобедренным. Следовательно, ни один из его углов не может быть равен 45°. По формуле Герона $S=2\sqrt{3}$. По формуле $r=\frac{S}{p}$ находим радиус вписанной окружности

$$r=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}=\sqrt{3}-1.$$

6. Для функции $y=-\frac{4}{x}$ верным высказыванием является:

А) она убывает;

Б) она непрерывна;

В) ее график проходит через точку $A(-0{,}1;\,40)$.

Данная функция терпит разрыв в точке $x=0$ и возрастает на всей области определения. При $x=-0{,}1$ $y(-0{,}1)=-\frac{4}{-0{,}1}=40$, значит функция проходит через точку $A(-0{,}1;\,40)$.

7. Сколькими способами могли бы рассесться по кругу герои басни Крылова «Квартет»?

А) 24 Б) 6 В) 20

Поскольку число участников квартета неизменно, а меняется только их положение друг относительно друга, количество возможных вариантов определяется числом перестановок из четырех элементов $P_4=4!=24$. Учащиеся, не знакомые с комбинаторикой, могут использовать следующие рассуждения. На первое место может сесть любой из четырех участников квартета, на второе – любой из трех оставшихся, на третье – любой из двух, четвертое место достается оставшемуся участнику квартета. Таким образом, общее число вариантов $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$.

Часть 3

8. Найдите значение выражения $\sqrt{16-\sqrt{255}}-\sqrt{16+\sqrt{255}}$.

А) $\pm\sqrt{30}$ Б) –30 В) 45 Г) $-\sqrt{30}$

Обозначим $\sqrt{16-\sqrt{255}}-\sqrt{16+\sqrt{255}}=a$. Возведем a в квадрат:

$$a^2=16-\sqrt{255}-2\sqrt{16-\sqrt{255}}\sqrt{16+\sqrt{255}}+16+\sqrt{255}=32-2\sqrt{16^2-255}=30.$$

Учитывая, что $a<0$, имеем $a=-\sqrt{30}$.

9. Если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2-7x+5=0$, то чему равно выражение $x_1^2+x_2^2$

А) 39 Б) 59 В) 76 Г) 78

По Теореме Виета сумма корней данного уравнения равна 7, а произведение равно 5. Выразим сумму квадратов корней через сумму и произведение корней:
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=49-10=39$.

10. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня - 50 кг, Маня и Ваня - 90 кг, Ваня и Даня - 100 кг, Даня и Аня - 60 кг. Сколько весит Аня?

А) 20 кг Б) 25 кг В) 23 кг Г) 21 кг

Если сложить все приведенные в условии задачи данные, то получится удвоенный общий вес ребят:

$$2(a+t+m+v+d)=(a+t)+(t+m)+(m+v)+(v+d)+(d+a)=40+50+90+100+50=340 \text{ кг}$$

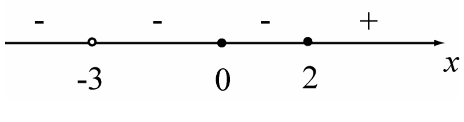
Тогда вес Ани можно найти по следующей формуле:

$$a=(a+t+m+v+d)-((t+m)+(v+d))=\frac{340}{2}-50-100=20 \text{ кг}.$$

11. Число целых решений неравенства $\frac{x^2(x-2)}{(x+3)^4}\geq 0$, лежащих на промежутке $[-6;6]$ равно

А) 4 Б) 6 В) 5 Г) 8

Решим неравенство $\frac{x^2(x-2)}{(x+3)^4}\geq 0$ методом интервалов:



Решение имеет вид: $x\in\{0\}\cup[2;+\infty)$. На промежутке $[-6;6]$ лежат корни $\{0\}\cup[2;6]$. Из них целых – 6.

12. Сумма корней уравнения $x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=1$ равна

А) 1 Б) -1 В) 0 Г) $-1+\sqrt{5}$

Решим уравнение $x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=1$, для этого преобразуем левую часть:

$$x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=2\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2=2\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2.$$

Введем замену переменной $t=x-\frac{1}{x}$ и получим уравнение $t^2+2t+1=0$, откуда $t=-1$.

Производя обратную замену, получаем $x-\frac{1}{x}=-1$, откуда $x^2+x-1=0$ и $x\neq 0$. По теореме Виета сумма корней уравнения равна –1.

13. При каком значении параметра a уравнение $ax^2-x+1=2x^2$ имеет единственный действительный корень?

А) 2 Б) 2,25 В) 2,5 Г) 1

Преобразует уравнение: $ax^2-x+1=2x^2 \Leftrightarrow (a-2)x^2-x+1=0$. При $a=2$ это уравнение является линейным $-x+1=0$ и имеет единственный корень. При $a\neq 2$ уравнение квадратное, и имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $D=1-4(a-2)=9-4a=0 \Rightarrow a=\frac{9}{4}=2,25$.

14. Для функции $y=x^2-6x+3$ найдите сумму наименьшего и наибольшего значений на промежутке $[0;\,5]$.

А) 1 Б) -8 В) 3 Г) -3

Наименьшее значение функции находится в вершине параболы. Абсцисса вершины $x_0=-\frac{-6}{2}=3$, тогда наименьшее значение равно $y(3)=-6$. Наибольшее значение функции лежит на одной из границ промежутка. Сравнив $y(0)=3$ и $y(5)=-2$, получаем, что наибольшее значение равно 3. Сумма наименьшего и наибольшего значений $-6+3=-3$.