

Краевая предметная олимпиада по математике для учащихся г. Перми и Пермского края.

Дополнительное задание. (20 б)

Антитела в организме человека борются с чужеродными бактериями и вирусами. Количество бактерий и количество антител являются функциями времени $B(t)$ и $A(t)$ соответственно. Бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству (коэффициент пропорциональности α). В то же время организм вырабатывает антитела, истребляющие бактерии со скоростью, пропорциональной количеству антител (коэффициент пропорциональности β). Скорость выработки антител пропорциональна количеству бактерий (коэффициент пропорциональности γ). Составьте уравнения, описывающие изменение количества бактерий и количества антител со временем. Пусть коэффициенты имеют следующие значения: $\alpha = 0,5$, $\beta = 7$, $\gamma = 0,05$. Считая, что в организм, содержащий 100 антител, попала 1000 бактерий, вычислите количества антител и бактерий через 2 дня после заражения (подсчеты производятся раз в день).

Решение: изменение количества бактерий и количества антител со временем описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{dB(t)}{dt} &= \alpha B(t) - \beta A(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \gamma B(t).\end{aligned}$$

Первое уравнение показывает, что скорость размножения бактерий увеличивается пропорционально количеству бактерий и уменьшается пропорционально количеству антител. Второе уравнение показывает, что скорость выработки антител растет пропорционально количеству бактерий.

Считая, что $\frac{dA(t)}{dt} \approx \frac{\Delta A(t)}{\Delta t}$, $\frac{dB(t)}{dt} \approx \frac{\Delta B(t)}{\Delta t}$ и $\Delta t = 1$, имеем приближенные уравнения для определения количества антител и бактерий:

$$\begin{aligned}\Delta B_i &= \alpha B_{i-1} - \beta A_{i-1}, \\ \Delta A_i &= \gamma B_{i-1}, \\ A_i &= A_{i-1} + \Delta A_i, \\ B_i &= B_{i-1} + \Delta B_i,\end{aligned} \quad i = \overline{1..n}.$$

Количество антител и бактерий и изменение их численности по дням приведены в таблице.

День	A_i	B_i	ΔA_i	ΔB_i
0	100	1000	50	-200
1	150	800	40	-650
2	190	150		

Комментарий: решение данного задания не требует от учащихся умения составлять и решать дифференциальные уравнения. Требуемые уравнения можно было записать в приращениях (это понятие известно школьникам из курса физики):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t} &= \alpha B(t) - \beta A(t), \\ \frac{\Delta A(t)}{\Delta t} &= \gamma B(t).\end{aligned}$$

Кроме того, можно было ввести дополнительную переменную, описывающую скорость размножения бактерий $\tilde{B}(t)$ и выработки антител $\tilde{A}(t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(t) &= \alpha B(t) - \beta A(t), \\ \tilde{A}(t) &= \gamma B(t).\end{aligned}$$