

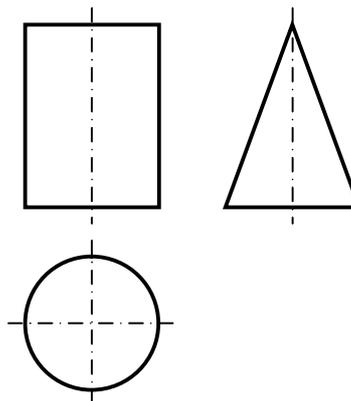
**Краевая предметная олимпиада по математике
для учащихся г. Перми и Пермского края. 9 класс**

При оформлении решения запишите сначала номер выполняемого задания, затем полное обоснованное решение и ответ.

Часть 1

Задание 1. (6 б.)

На рисунке представлены три проекции некоторой детали. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует. Изобразите недостающие, по вашему мнению, линии на проекциях.



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y = \frac{5}{2x^2 - 8x + 3} - 1$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $\frac{1}{(x^2 - 2x)^2 + 1} + \frac{2}{x^2 - 4x + 6} + \frac{3}{(x^2 - 3x + 2)^2 + 3} = 3$.

Задание 4. (12 б.)

Катеты прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $2x^2 - 10x + 9 = 0$. Найдите отношение площадей кругов, описанного около этого треугольника и вписанного в него.

Задание 5. (12 б.)

Найдите все значение a , при которых система $\begin{cases} ax + 3y = a^2 - a, \\ 2x + (a - 1)y = 3a - 5 \end{cases}$ не имеет решений.

Задание 6. (10 б.)

Необходимо сварить стальной бак с верхней крышкой, имеющий форму куба со стороной a . Для этого из цельного стального листа вырезают развертку куба, затем развертку сгибают и сваривают швы бака. Какова минимальная площадь листа стали для изготовления развертки бака? Определите наиболее рациональные размеры стального листа, чтобы после вырезания развертки осталось минимальное количество отходов металла. Изобразите используемую при этом развертку куба. Найдите минимальную длину сварного шва.

Дополнительное задание. (20 б)

Антитела в организме человека борются с чужеродными бактериями и вирусами. Количество бактерий и количество антител являются функциями времени $B(t)$ и $A(t)$ соответственно. Бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству (коэффициент пропорциональности α). В то же время организм вырабатывает антитела, истребляющие бактерии со скоростью, пропорциональной количеству антител (коэффициент пропорциональности β). Скорость выработки антител пропорциональна количеству бактерий (коэффициент пропорциональности γ). Составьте уравнения, описывающие изменение количества бактерий и количества антител со временем. Пусть коэффициенты имеют следующие значения: $\alpha = 0,5$, $\beta = 7$, $\gamma = 0,05$. Считая, что в организм, содержащий 100 антител, попала 1000 бактерий, вычислите количества антител и бактерий через 2 дня после заражения (подсчеты производятся раз в день).

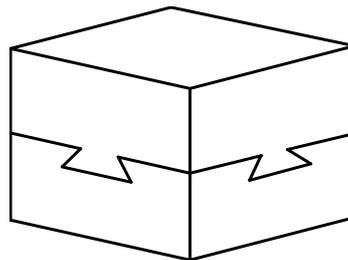
Краевая предметная олимпиада по математике
для учащихся г. Перми и Пермского края. 10 класс

При оформлении решения запишите сначала номер выполняемого задания, затем полное обоснованное решение и ответ.

Часть 1

Задание 1. (5 б.)

Две детали соединены в куб. Верхняя деталь имеет выступы в виде ласточкина хвоста, входящие в пазы нижней детали. Как соединили эти детали? Нарисуйте вид сверху или опишите способ соединения словесно.



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 4x + 5}$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $x + x \cdot \sqrt[3]{28 - x^3} + \sqrt[3]{28 - x^3} = 7$ на множестве рациональных чисел.

Задание 4. (12 б.)

В треугольнике стороны равны 9, 13 и a . Найдите все значения a , при которых треугольник будет тупоугольным.

Задание 5. (10 б.)

При каких значениях a выражение $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ имеет смысл при любых значениях x ?

Задание 6. (13 б.)

Найдите значения, которые может принимать сумма квадратов действительных различных корней уравнения $x^2 + 3kx + 3k^2 - 3k - 15 = 0$.

Дополнительное задание. (20 б)

Антитела в организме человека борются с чужеродными бактериями и вирусами. Количество бактерий и количество антител являются функциями времени $B(t)$ и $A(t)$ соответственно. Бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству (коэффициент пропорциональности α). В то же время организм вырабатывает антитела, истребляющие бактерии со скоростью, пропорциональной количеству антител (коэффициент пропорциональности β). Скорость выработки антител пропорциональна количеству бактерий (коэффициент пропорциональности γ). Составьте уравнения, описывающие изменение количества бактерий и количества антител со временем. Пусть коэффициенты имеют следующие значения: $\alpha = 0,5$, $\beta = 7$, $\gamma = 0,05$. Считая, что в организм, содержащий 100 антител, попала 1000 бактерий, вычислите количества антител и бактерий через 2 дня после заражения (подсчеты производятся раз в день).

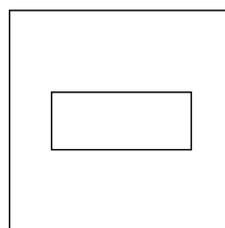
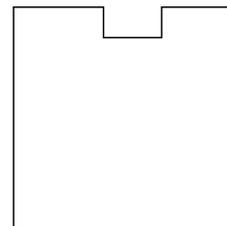
**Краевая предметная олимпиада по математике
для учащихся г. Перми и Пермского края. 11 класс**

При оформлении решения запишите сначала номер выполняемого задания, затем полное обоснованное решение и ответ.

Часть 1

Задание 1. (6 б.)

На рисунке приведен вид сверху и вид сбоку некоторой детали. Может ли существовать такая деталь? Если вы считаете, что такая деталь существует, начертите недостающий вид спереди.



Задание 2. (8 б.)

Найдите множество значений функции $y = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(0,125(2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x - 4)) - 3$.

Задание 3. (10 б.)

Решите уравнение $\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x$.

Задание 4. (10 б.)

В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a . Из конца K диаметра KP , параллельного стороне AB , сторона BC видна под углом 2β . Найти радиус окружности.

Задание 5. (12 б.)

Найдите все значения α , где $\alpha \in [0; 2\pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y + 4\sqrt{2})^2 = 16, \\ (x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 = 1 \end{cases} \text{ имеет хотя бы одно решение.}$$

Задание 6. (12 б.)

Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной 2. Боковое ребро параллелепипеда равно 5. Через отрезок, соединяющей две точки на противоположных концах основания и параллельный двум другим сторонам основания, проведена плоскость, отсекающая от параллелепипеда треугольную призму с периметром основания, равным 8. Найдите наименьшее значение объема оставшейся части параллелепипеда.

Дополнительное задание. (20 б)

Антитела в организме человека борются с чужеродными бактериями и вирусами. Количество бактерий и количество антител являются функциями времени $B(t)$ и $A(t)$ соответственно. Бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству (коэффициент пропорциональности α). В то же время организм вырабатывает антитела, истребляющие бактерии со скоростью, пропорциональной количеству антител (коэффициент пропорциональности β). Скорость выработки антител пропорциональна количеству бактерий (коэффициент пропорциональности γ). Составьте уравнения, описывающие изменение количества бактерий и количества антител со временем. Пусть коэффициенты имеют следующие значения: $\alpha = 0,5$, $\beta = 7$, $\gamma = 0,05$. Считая, что в организм, содержащий 100 антител, попала 1000 бактерий, вычислите количества антител и бактерий через 2 дня после заражения (подсчеты производятся раз в день).