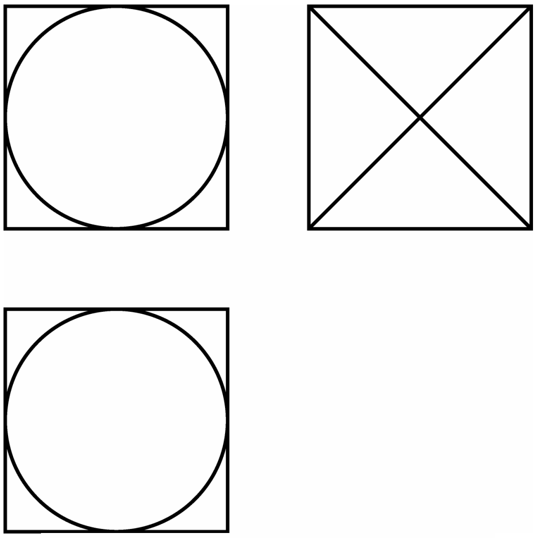
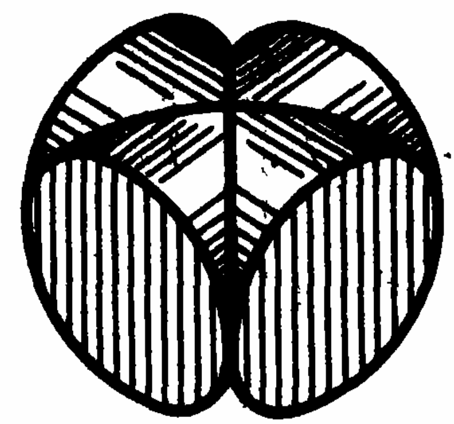
Краевая олимпиада «Математика в решении мультидисциплинарных задач» для учащихся г. Перми и Пермского края. 2012 г. 10 класс

Задание 1. (6 б.)
На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке:

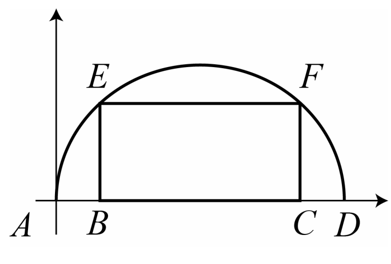


Критерии оценивания:
- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (8 б.) Найдите наибольший периметр прямоугольника, две из вершин которого лежат на графике функции $y = 3x - x^2$, а две другие – на оси абсцисс.

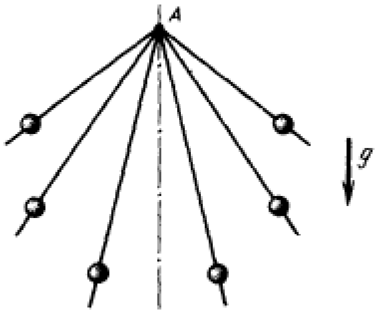
Ответ: 6,5.

Решение: Рассмотрим прямоугольник $BCFE$. Парабола $y = 3x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $A(0;0)$ и $D(3;0)$. Обозначим $AB = x$, тогда $BC = 3 - 2x$, $BE = y = 3x - x^2$. Найдем периметр прямоугольника $P(x) = 2\left(BC + BE\right) = 2\left(3 - 2x + 3x - x^2\right) = 2\left(-x^2 + x + 3\right)$. Периметр является квадратичной функций, которая принимает наибольшее значение в вершине параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$. При этом периметр равен $P\left(0,5\right) = 6,5$.



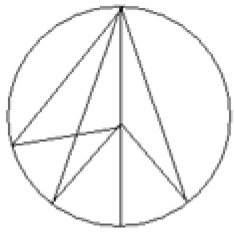
Критерии оценивания:
- Правильно сделан рисунок к задаче – 1,5 б
- Путем перебора исследованы периметры различных прямоугольников – до 2,5 б
- Верно определены стороны прямоугольника – по 1,5 б (итого 3 б)
- Составлена зависимость $P(x)$ – 2 б
- Определение наибольшего значения функции – 3 б

Задание 3. (10 б.) Из точки A по длинным спицам, наклоненных к вертикали под различными углами, одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. Найдите кривую, на которой будут находиться бусинки в момент времени t.



Ответ: На окружности диаметра $\frac{gt^2}{2}$ с верхней точкой в точке A.

Решение: Перемещение каждой бусинки по соответствующей направляющей за время t равно $\frac{g\cos\alpha t^2}{2}$, где α – угол между направляющей и вертикалью. Далее можно заметить, что соответствующее выражение совпадает с длиной хорды, стянутой дугой, опирающейся на центральный угол 2α (время t в данном случае является параметром): $\frac{g\cos\alpha t^2}{2} = \frac{gt^2}{4}\sqrt{1-\cos 2\alpha}$. Диаметр окружности совпадает с максимальным перемещением бусинки – $\frac{gt^2}{2}$.

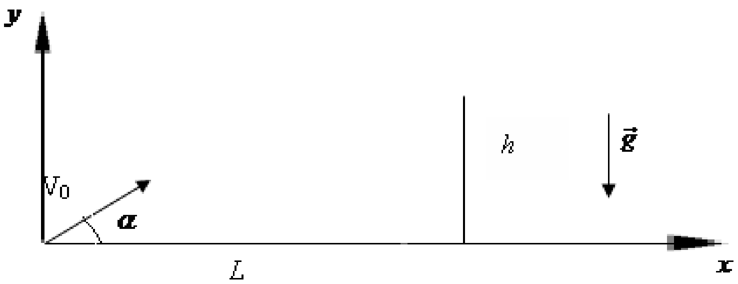


Критерии оценивания:
- Найдено расстояние, пройденное произвольной бусинкой – 2 б
- Правильно сделано геометрическое построение – 6 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 8 б

Задание 4. (14 б.) Из пушки стреляют через вертикальное препятствие высотой h, находящееся на расстоянии L от пушки. Снаряд вылетает с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтали. Найдите минимальную начальную скорость, с которой нужно запустить снаряд, чтобы он перелетел через препятствие. Определите угол выстрела α, соответствующий этой начальной скорости.

Ответ: $v_{0\min} = \sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)}$, $tg\alpha_{v_0\min} = \frac{v_0^2}{gL}$.

Решение: Введем оси координат так, как показано на рисунке, запишем уравнения движения снаряда вдоль осей x и y ($t_0 = 0$):



$$x(t) = v_0 \cos\alpha t, \ (1)$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \ (2)$$

В момент, когда снаряд находится прямо над препятствием $x = L, y = h$. Тогда

$$t_1 = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}, \ (3)$$

и, если преобразовать (2):

$$h = Ltga - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = Ltga - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1 + tg^2\alpha\right). \ (4)$$

Решая квадратное уравнение относительно $tg\alpha$, имеем:

$$tg\alpha_{1,2} = \frac{v_0^2}{gL^2}\left(L \pm \sqrt{L^2 - 2\frac{gL^2}{v_0^2}\left(h + \frac{gL^2}{2v_0^2}\right)}\right), \ (5)$$

при выполнении условия

$$D = L^2 - 2\frac{gL^2}{v_0^2}\left(h + \frac{gL^2}{2v_0^2}\right) \geq 0. \ (6)$$

Проанализируем (6). Преобразовав правую часть выражения, и приравняв ее к нулю (т.к. ищем минимальное значение), получим квадратичное выражение относительно v_0^2:

$$v_0^4 - 2gv_0^2 - g^2L^2 = 0, \ (7)$$

$$v_0^2 = gh \pm g\sqrt{h^2 + L^2}. \ (8)$$

Отсюда (т.к. выражение (8) дает только один положительный корень относительно v_0^2)

$$v_{0\min} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + L^2}\right)}, \ (9)$$

и, соответственно,

$$tg\alpha_{v_0 \min} = \frac{v_0^2}{gL}. \ (10)$$

Критерии оценивания:

- Решение верно доведено до уравнения (4) – 3 б
- Уравнение (4) верно разрешено относительно $tg\alpha$ - 5,5 б
- Выполнены верные преобразования дискриминанта (6), приводящие к выражению (7) – 8,5 б
- Уравнение (7) разрешены относительно v_0^2, но не отобраны корни, приводящие к (9), либо не получены выражения (9) и (10) – 11 б

Задание 5. (14 б.) В математическом лагере два отряда играли в волейбол за первое место. В самый ответственный момент матча судья решил, что мяч ушел в аут. Но многие не были согласны с этим решением. Оказалось, что один из болельщиков успел сделать три фотографии, пока мяч был в воздухе. Тогда ребята решили рассчитать траекторию полета мяча по имеющимся координатам трех точек, вычисленных по фотографиям: (6;3), (4;7) и (2;6). Считается, что мяч летит по параболической траектории вида $y = ax^2 + bx + c$ в системе координат, начало которой расположено на границе поля, против направления оси абсцисс. Определите траекторию движения мяча, найдите координаты точки, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли. Выясните, был ли судья прав (считается, что если мяч коснулся границы поля, то мяч забит).

Ответ: Уравнение имеет вид: $y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x$. Координаты: $(0;0)$ и $(6,8;0)$. Мяч коснулся границы поля, значит мяч был забит.

Решение: Так как известны 3 точки, в которых находился мяч, подставив соответствующие значения координат в уравнение $y = ax^2 + bx + c$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 6, \\ 16a + 4b + c = 7, \\ 36a + 6b + c = 3. \end{cases}$$

Данную систему можно решить, например, методом Крамера. При этом $\Delta = -16$, $\Delta_1 = 10$, $\Delta_2 = -68$, $\Delta_3 = 0$, тогда корни $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{8}$, $a = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{17}{4}$, $a = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$. Тогда уравнение параболы имеет вид $y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x$. Для определения координат точек, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли, приравняем данную функцию к нулю: $-\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x = 0$. Откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 6,8$. Значить удар был произведен из точки с координатами $(6,8;0)$, а коснулся мяч земли в точке с координатой $(0;0)$. Таким образом, мяч был забит.

Критерии оценивания:

- Верно составлено уравнение системы – по 1 б (итого 3 б)
- Правильно определен коэффициент в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ – по 2,5 б (итого 7,5 б)
- Правильно решено квадратное уравнение – 1,5 б
- Правильно найдены координаты точки, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли и сделан вывод о правоте судьи – 2 б

Задание 6. (18 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Составьте уравнения, описывающие изменение зарплаты и количества рабочих со временем.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30\,000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. Пусть на начало января на предприятии работало 550 рабочих, каждый из которых получал по 25 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих – 300 человек, зарплата – 50 000 руб. Уравнения см. ниже.

Решение: Изменение зарплаты и численности рабочих по времени определяются одной из формул (1)-(3):

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ N'(t) &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right)\Delta t, \\ \Delta N &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right)\Delta t, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p'(t)$, $N'(t)$ - производные от зарплаты и количества рабочих по времени, соответственно; Δp, ΔN - изменение зарплаты и количества рабочих за промежуток времени Δt; α и β - коэффициенты пропорциональности.

Тогда заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right), \\ N_i &= N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \frac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \frac{\Delta N}{\Delta p} = 0,01$.

Используя соотношения (4), составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	25 000	20 000	20 000	30 000	50 000
N_i	550	500	400	300	300

При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

Критерии оценивания:

- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих в форме (1), (2) или (3) – по 3 б (итого 6 б)
- Верно составлено рекуррентное соотношение (4) – 3 б
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1 б (итого 4 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б