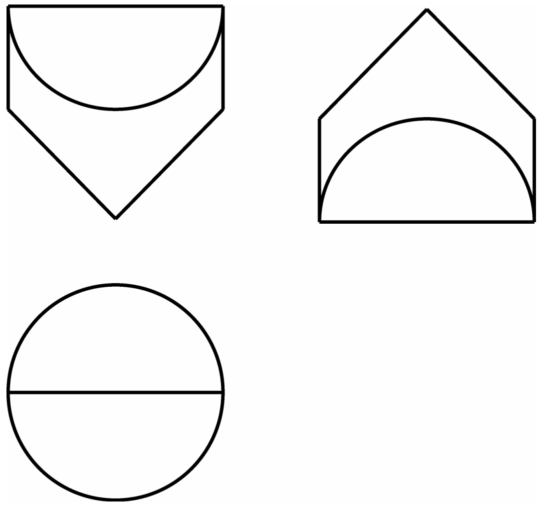
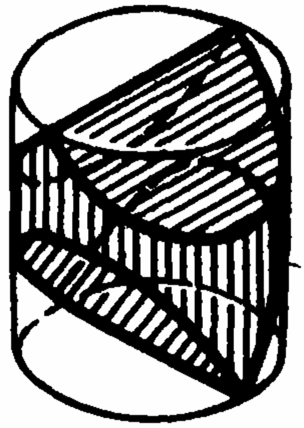
Краевая олимпиада «Математика в решении мультидисциплинарных задач» для учащихся г. Перми и Пермского края. 2012 г. 11 класс

Задание 1. (6 б.)
На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке:



Критерии оценивания:

- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (8 б.) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся количеству добавили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и добавили 2 л воды, затем вновь повторили эту операцию. В результате всех операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Найдите количество воды и глицерина, оказавшихся в сосуде после всех проделанных операций.

Ответ: 0,5 л глицерина и 3,5 л воды.

Решение: Обозначим за x объем сосуда, тогда после первой операции глицерин займет $\frac{x-2}{x}$ часть сосуда. Отлив 2 л смеси, получим $\frac{x-2}{x}(x-2)$ л глицерина в сосуде, а после доливания 2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ часть сосуда. Аналогично после следующей замены 2 л смеси на 2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$ часть сосуда. Тогда количество глицерина в сосуде после всех операций равно $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$, а количество воды $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3$. В сумме же они дают первоначальный объем сосуда. Таким образом, получаем кубическое уравнение:

$$2x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3=x\,. \quad (1)$$

$$x^3-9x^2+24x-16=0,$$

$$(x-1)(x-4)^2=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=4.$$

Первый корень не подходит по смыслу задачи, следовательно $x=4$, количество глицерина $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3=0,5$ л, количество воды 3,5 л.

<u>Критерии оценивания:</u>

- Правильно определено количество или найдена доля глицерина в сосуде после каждой операции – по 1 б (итого 3 б)
- Составлено уравнение (1) – 2 б
- Верно решено уравнение (1) – 2 б
- Произведен отбор корней и определено количество воды и глицерина – 1 б

<u>Задание 3. (10 б.)</u> Сферический резервуар радиуса R стоит на земле. С уровня земли через данный резервуар перебрасывают камень. Найти начальную скорость и угол вылета, при которых камень перелетит через резервуар, коснувшись его только в наивысшей точке.

<u>Ответ</u>: $v_0=\sqrt{5Rg}$, $tg\alpha=2$.

<u>Решение</u>: Из кинематики находим высоту подъема камня в высшей точке:

$$y_{\max}=2R=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}. \quad (1)$$

Радиус кривизны траектории в верхней точке должен быть равен радиусу шара (из формулы для нормального ускорения в верхней точке):

$$a_n=g=\frac{v_x^2}{R}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{R}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1)-(2), получаем:

$$v_0=\sqrt{5Rg},\ tg\alpha=2.$$

<u>Критерии оценивания:</u>

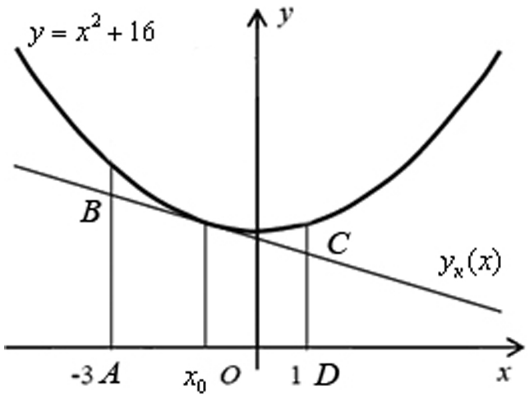
- Решение верно доведено до уравнения (1) – 4 б
- Решение верно доведено до уравнения (2) – 6 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 8 б

<u>Задание 4. (14 б.)</u> Найдите наибольшую площадь фигуры на плоскости xOy, ограниченной прямыми $x=-3$ и $x=1$, осью Ox и касательной к графику функции $y=x^2+16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3\le x_0\le 1$.

<u>Ответ</u>: 68.

<u>Решение</u>: Составим уравнение касательно, проведенной к графику функции $y=x^2+16$ в точке x_0: $y_к(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)=x_0^2+16+2x_0(x-x_0)=-x_0^2+2xx_0+16$. Получившаяся

фигура на плоскости – это трапеция $ABCD$, площадь которой $S=\frac{AB+CD}{2}AD$. Для данной трапеции высота $AD=1-(-3)=4$, $AB=y_к(-3)=-x_0^2-6x_0+16$, $CD=y_к(1)=-x_0^2+2x_0+16$. Тогда площадь $S(x_0)=4(-x_0^2-2x_0+16)$. $S'(x_0)=4(-2x_0-2)=0$, значит максимум этой функции достигается при $x_0=-1$ и равно $S(-1)=4(-1+2+16)=68$.



Критерии оценивания:

- Сделан верный рисунок к задаче – до 1,5 б
- Составлено уравнение касательной – 4 б
- Найдены основания и высота трапеции – по 2 б (итого 6 б)
- Выражена площадь трапеции в зависимости от точки касания – 1 б
- Найден максимум данной функции и вычислена наибольшее значение площади – 3 б

Задание 5. (14 б.) Материальная точка, имеющая массу 1 кг, движется под действием горизонтальной силы $F=10(1-t)$ Н. Ее начальная скорость $v_0=20$ м/с и сила F совпадают по направлению. По истечению 1 секунды сила поменяет направление и начнет препятствовать движению точки. Найдите зависимость скорости данной точки от времени. Определите, за какое время точка полностью остановится.

Ответ: $v(t)=10t-5t^2+20$ м/с, $t_{ост}=1+\sqrt{5}$ с.

Решение: Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось $ma=F=10(1-t)$. Тогда $a=\frac{F}{m}=10(1-t)$. Согласно физическому смыслу производной $a=v'$, тогда скорость равна первообразной от ускорения $v(t)=10t-5t^2+C$. Для определения неизвестной константы C воспользуемся условием $v_0=20$ м/с: $v(0)=C=20$, тогда $v(t)=10t-5t^2+20$ м/с. Приравнивая скорость к нулю, получаем $10t-5t^2+20=0$, откуда $t=1\pm\sqrt{5}$. Поскольку время не может быть отрицательным, $t_{ост}=1+\sqrt{5}$ с.

Критерии оценивания:

- Определено ускорения из второго закона Ньютона – 2 б
- Указание на связь между скоростью и ускорением без определения скорости – 1 б
- Определение скорости как первообразной без учета неизвестной константы – 3 б
- Верно определена зависимость скорости от времени с помощью понятия первообразной, интеграла или какими-либо другими способами – 8 б
- Правильно составлено и решено квадратное уравнение для определения времени остановки – 3 б
- Произведен отбор корней – 1 б

Задание 6. (18 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Составьте уравнения, описывающие изменение зарплаты и количества рабочих со временем.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30\,000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. Пусть на начало января на предприятии работало 500 рабочих, каждый из которых получал по 20 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих – 500 человек, зарплата – 70 000 руб. Уравнения см. ниже.
Решение: Изменение зарплаты и численности рабочих по времени определяются одной из формул (1)-(3):

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ N'(t) &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right)\Delta t, \\ \Delta N &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right)\Delta t, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p'(t)$, $N'(t)$ - производные от зарплаты и количества рабочих по времени, соответственно; Δp, ΔN - изменение зарплаты и количества рабочих за промежуток времени Δt; α и β - коэффициенты пропорциональности.

Тогда заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right), \\ N_i &= N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \dfrac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \dfrac{\Delta N}{\Delta p} = 0{,}01$.

Используя соотношения (4), составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	20 000	20 000	30 000	50 000	70 000
N_i	500	400	300	300	500

При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

Критерии оценивания:

- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих в форме (1), (2) или (3) – по 3 б (итого 6 б)
- Верно составлено рекуррентное соотношение (4) – 3 б
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1 б (итого 4 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б