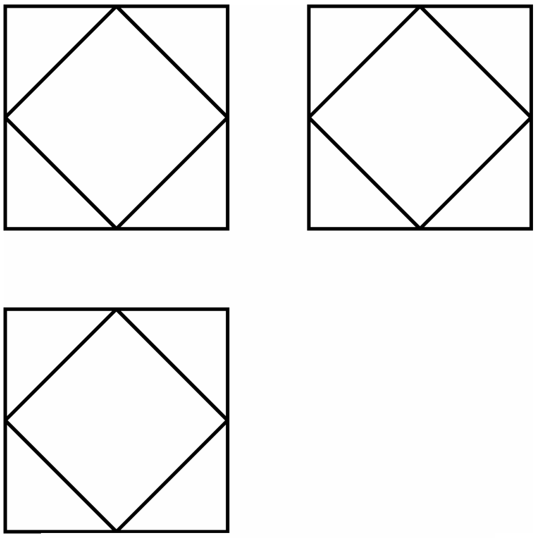
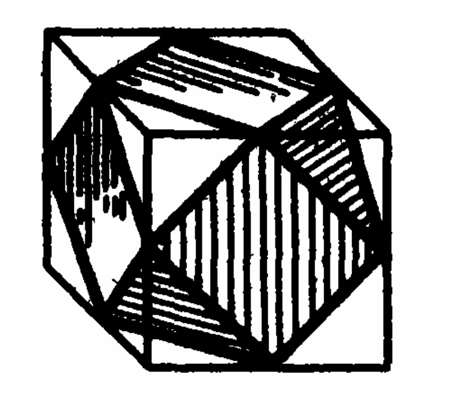
Краевая олимпиада «Математика в решении мультидисциплинарных задач» для учащихся г. Перми и Пермского края. 2012 г. 9 класс

Задание 1. (6 б.)
На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке. Также условиям данной задачи удовлетворяет деталь, состоящая из 8 треугольных пирами, соединенных вершинами, т.е. являющаяся той частью куба, которая на рис. из куба вырезана.



Критерии оценивания:
- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (10 б.) В емкости смешали a килограммов 6% раствора соли и b килограммов 20% раствора соли. Полученный раствор обладает следующим свойством. При смешивании его с одним килограммом 6% раствора получается 10% раствор, а при смешивании с одним килограммом 20% раствора получается 18% раствор. Найти массы a и b.

Ответ: $a = 0,25$, $b = 0,5$ кг.

Решение: После первого смешивания в емкости содержится $0,06a + 0,2b$ кг соли. Если прибавить к этому раствору 1 кг 6% раствора, получится раствор, содержащий $0,06(a+1) + 0,2b$ кг соли, а если прибавить 1 кг 20% раствора - $0,06a + 0,2(b+1)$ кг соли. Известно, что в первом случае получиться 10% раствор массой $a+b+1$ кг, который будет содержать $0,1(a+b+1)$ кг соли, а во втором случае 18% раствор той же массы, содержащий $0,18(a+b+1)$ кг соли. Таким образом, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,06(a+1) + 0,2b = 0,1(a+b+1), \\ 0,06a + 0,2(b+1) = 0,18(a+b+1). \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $a+b=0,75$. Затем, подставляя $b=0,75-a$ в одно из уравнений, получаем $a=0,25$, $b=0,5$.

Критерии оценивания:

- Верное определение количества соли после каждой из операций – по 1 б (итого 5 б)
- Верное составление уравнения – по 3,5 б (итого 7 б)
- Верное решение системы уравнений – 3 б
- Решение задачи другими методами – от 0 до 10 б

Задание 3. (12 б.) Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние L, а затем начинает тормозить с постоянным ускорением a. При какой начальной скорости частицы время ее движения от вылета из источника до остановки будет наименьшим?

Ответ: $v_{\min}=\sqrt{La}$.

Решение: Время движения складывается из времени движения со скоростью v и времени торможения с ускорением a:

$$t=t_1+t_2=\frac{L}{v}+\frac{v}{a}=\frac{La+v^2}{av}$$

Преобразовав уравнении к виду $v^2-tav+La=0$, получим квадратичную функцию. Графиком которой является парабола с вершиной в точке $v_0=\frac{ta}{2}$. Подставляя данное значение скорости в выражение для времени, получаем наименьшее время $t_{\min}=\sqrt{\frac{2L}{a}}$ и по нему находим скорость $v_{\min}=\sqrt{La}$.

Критерии оценивания:

- Получено выражение для времени – 2,5 б
- Верно найдена связь между наименьшим временем и начальной скоростью – 7,5 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 10 б

Задание 4. (12 б.) Найдите множество значений функции $y=11-x^2-2\sqrt{9-x^2}$.

Ответ: $E(y)=[1;5]$.

Решение: Введем новую переменную $t=\sqrt{9-x^2}$, которая принимает значения $t\in[0;3]$. Тогда $x^2=9-t^2$ и исходная функция имеет вид $y=11-(9-t^2)-2t=t^2-2t+2$. Графиком данной функции является парабола, определенная на отрезке $[0;3]$. Минимум данной параболы находится в точке с абсциссой $t_0=-\frac{b}{2a}=1$ и ординатой $y(1)=1$. Наибольшее значение достигается на одном из концов рассматриваемого отрезка: $y(0)=2$, $y(3)=5$. Таким образом, наименьшее значение функции равно 1, наибольшее – 5, значит область значений имеет вид $E(y)=[1;5]$.

Критерии оценивания:

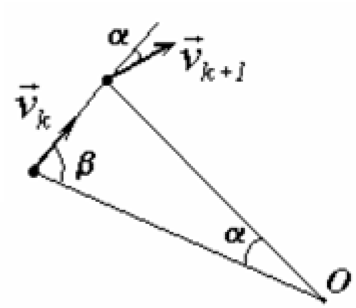
- Правильно найдена область определения функции – 1 б
- Верно определено множество значений функции $t=\sqrt{9-x^2}$ – 3 б
- Задача верно сведена к исследованию квадратичной функции – 8 б
- Найдено наибольшее или наименьшее значение функции – по 2 б (итого 4 б)

Задание 5. (14 б.) N черепах находятся в вершинах правильного N-угольника со стороной L и начинаются двигаться с постоянными по модулю скоростями u, так что вектор скорости первой все время направлен на вторую, второй на третью, ..., n-ой на первую. Через какое время черепахи встретятся?

Ответ: $t = \frac{L}{v_{сбл}} = \frac{L}{2v\sin^2\frac{\pi}{n}}$.

Решение: Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент времени черепахи будут находиться в вершинах правильного n-угольника, который постоянно поворачивается и сжимается. Однако в процессе движения углы между векторами скоростей черепах изменяться не будут. Легко найти угол между скоростями «соседних» черепах - он равен центральному углу α правильного n-угольника, причем $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Поэтому скорость сближения соседних черепах находится по формуле $v_{сбл} = v\left(1-\cos\alpha\right)$ или $v_{сбл} = 2v\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Тогда время движения черепах до встречи вычисляется по формуле $t = \frac{L}{v_{сбл}} = \frac{L}{2v\sin^2\frac{\pi}{n}}$.



Критерии оценивания:
- Найден угол между черепахами – 1,5 б
- Правильно найдена скорость сближения черепах – 8,5 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 12 б

Задание 6. (16 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30\,000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. На начало января на предприятии работало 400 рабочих, каждый из которых получал по 30 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих – 900 человек, зарплата – 30 000 руб.

Решение: Заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$p_i = p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right),$$

$$N_i = N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right),$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца; α и β - коэффициенты пропорциональности.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5\,000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \frac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \frac{\Delta N}{\Delta p} = 0,01$.

Используя приведенные выше формулы, составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	30 000	40 000	50 000	50 000	30 000
N_i	400	400	500	700	900

Анализ таблицы показывает, что нехватка рабочих на предприятии в начале рассматриваемого периода приводит к увеличению зарплаты в конце января, но рабочие еще не знают об этом увеличении и их количество в январе не меняется. Поэтому в конце февраля зарплата вновь увеличивается и возрастает количество рабочих, узнавших об увеличении зарплаты в январе. В марте зарплата не меняется, т.к. количество рабочих равно равновесному значению, но рабочие по прежнему продолжают поступать, т.к. зарплата значительно превышает равновесную. Поскольку на конец апреля количество рабочих на предприятии значительно больше необходимого, зарплата резко падает, но еще не узнавшие об этом рабочие продолжают приходить на предприятие.

При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

Критерии оценивания:

- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих – по 2,5 б (итого 5 б)
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1,5 б (итого 6 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б