Задача 1

Пусть точка A лежит между M и B. Через точку M проведём прямую, касающуюся окружности в точке C. Тогда угол ACM равен половине дуги AC, не содержащей точку B (угол между касательной и хордой), а т.к. вписанный угол ABC также равен половине этой дуги, то $\angle ACM = \angle CBM$, значит, треугольник ACM подобен треугольнику CBM по двум углам (угол при вершине M — общий для этих треугольников). Следовательно, $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$, откуда $MA \cdot MB = MC^2$.

Пусть O — центр окружности. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OCM находим, что

$MC^2 = MO^2 - OC^2 = d^2 - R^2$.

Следовательно,

$MA \cdot MB = d^2 - R^2$.

Пусть точка A лежит между M и B. Через точку M проведём прямую, касающуюся окружности в точке C. Тогда угол ACM равен половине дуги AC, не содержащей точку B (угол между касательной и хордой), а т.к. вписанный угол ABC также равен половине этой дуги, то $\angle ACM = \angle CBM$, значит, треугольник ACM подобен треугольнику CBM по двум углам (угол при вершине M — общий для этих треугольников). Следовательно, $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$, откуда $MA \cdot MB = MC^2$.

Пусть O — центр окружности. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OCM находим, что

$MC^2 = MO^2 - OC^2 = d^2 - R^2$.

Следовательно,

$MA \cdot MB = d^2 - R^2$.

Пусть точка A лежит между M и B. Через точку M проведём прямую, касающуюся окружности в точке C. Тогда угол ACM равен половине дуги AC, не содержащей точку B (угол между касательной и хордой), а т.к. вписанный угол ABC также равен половине этой дуги, то $\angle ACM = \angle CBM$, значит, треугольник ACM подобен треугольнику CBM по двум углам (угол при вершине M — общий для этих треугольников). Следовательно, $\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC}$, откуда $MA \cdot MB = MC^2$.

Пусть O — центр окружности. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OCM находим, что

$MC^2 = MO^2 - OC^2 = d^2 - R^2$.

Следовательно,

$MA \cdot MB = d^2 - R^2$.

Ответ

$d^2 - R^2$.

Задача 2

Обозначим $\angle CFD = \angle CED = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), тогда $\angle CDF = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle AED = \angle CED = \angle CFD = \alpha$, то треугольник CFD — равнобедренный, поэтому его высота CH проходит через середину H отрезка DF и является искомой высотой данной трапеции. Пусть R —радиус окружности, описанной около треугольника CFD (по условию $R = 17$). По теореме синусов находим, что

$$\sin \angle CFD = \sin \alpha = \frac{CD}{2R} = \frac{30}{2 \cdot 17} = \frac{15}{17}.$$

Из прямоугольного треугольника CHD находим, что

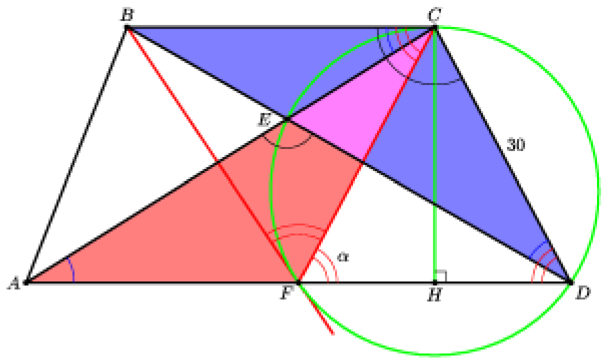
$$CH = CD \sin \alpha = 30 \cdot \frac{15}{17} = \frac{450}{17}.$$

Поскольку $\angle BCF = \angle CFD = \angle CDF = \alpha$, то по теореме, обратной теореме об угле между касательной и хордой, прямая BC касается окружности в точке C. Тогда $BC = BF$ и $\angle BFC = \angle BCF = \angle CDF$. Следовательно, во-первых:

$$BC = \frac{1}{2} FC : \cos \angle BCF = 15 : \cos \alpha = 15 : \sqrt{1 - \frac{15}{17}} = 15 : \frac{8}{17} = \frac{255}{8};$$

во-вторых: треугольник BFC подобен треугольнику CFD (равнобедренные треугольники с соответственно равными углами при основаниях), поэтому $\frac{CF}{BC} = \frac{FD}{CD}$, откуда $FD = CD \cdot \frac{CF}{BC}$. Поскольку $\angle CAF = \angle ACB = \angle CDB$, $\angle ACF = \angle BDF = \angle CBD$, то треугольники ACF и DBC подобны. Поэтому $\frac{AF}{CD} = \frac{CF}{BC}$, откуда $AF = CD \cdot \frac{CF}{BC}$. Ранее же было доказано, что $FD = CD \cdot \frac{CF}{BC}$, значит, $AF = FD = 2CD \cos \angle CDF = 2 \cdot 30 \cdot \frac{8}{17} = \frac{480}{17}$.

Следовательно, $AD = AF + FD = 2AF = \frac{960}{17}$.



Ответ

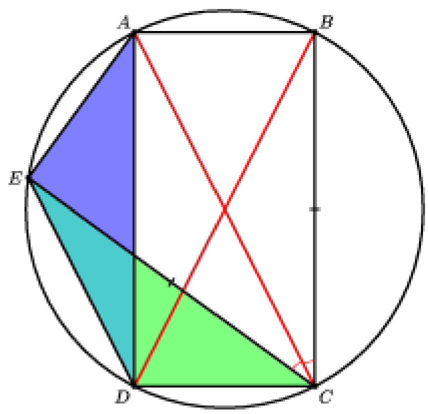
$\frac{450}{17}$, $\frac{255}{8}$, $\frac{960}{17}$.

Задача 3

Поскольку DE — общее основание равновеликих треугольников ADE и CDE, то их высоты, опущенные из вершин A и C, равны, поэтому $AC \parallel DE$. Аналогично $BC \parallel AD$. Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны, поэтому

$\angle ACE = \angle ADE = \angle CAD = \angle DBC = \angle ACB$.

Значит, CA — биссектриса угла BCE и $AB = AE$, а прямая AC — серединный перпендикуляр к хорде BE. Следовательно, отрезок AC — диаметр окружности, а четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник. Поэтому $AC = BD$ и по условию задачи $3AC + 2BD = 5CD = 5\sqrt{5}$. Значит, диаметр окружности равен $\sqrt{5}$, а её длина равна $\pi\sqrt{5}$.



Ответ

$\pi\sqrt{5}$.

Задача 4

Поскольку $\angle BAC + \angle ACB = 180^o - \angle B$, то $\angle DAC + \angle ACD = 90^o - \frac{1}{2}\angle B$. Поэтому

$$\angle ADC = 180^o - (90^o - \frac{1}{2}\angle B = 90^o + \frac{1}{2}\angle B > 90^o - \angle B,$$

т.е. угол ADC — тупой. Поэтому точки D и O лежат по разные стороны от прямой AC. Из равнобедренного AOC треугольника находим, что

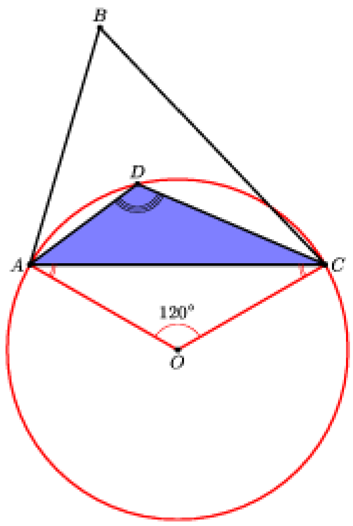
$$AC = 2OC\cos 30^o = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Поскольку $\angle AOC$ — центральный угол окружности с центром O и $\angle AOC = 120^o$, то вписанный в эту окружность $\angle ADC$ равен половине дуги AC, не содержащей точку D, т.е. $\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 240^o = 120^o$. Из равенства $\angle ADC = 90^o + \frac{1}{2}\angle B$ находим, что

$$\angle B = 2(\angle ADC - 90^o) = 2(120^o - 90^o) = 60^o.$$

Пусть r — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов

$$r = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{6\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$$



Ответ

6.

Задача 5

Пусть D — точка пересечения данной окружности с прямой BC. Обозначим $AB = c$, $BC = a$. Применяя теорему синусов к треугольнику ABC, получим пропорцию

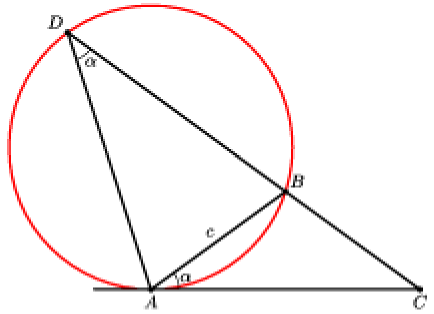
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тогда

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда находим, что $c = \sqrt{\frac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$. По теореме об угле между касательной и хордой находим, что либо $\angle ADB = \angle BAC = \alpha$ (рис.1), либо $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$ (рис.2). В обоих случаях $\sin\angle ADB = \sin\alpha$. Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABD. Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = \frac{c}{2\sin\alpha} = \sqrt{\frac{S\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^3\alpha\sin\beta}}.$$



Ответ

$$\sqrt{\frac{S\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^3\alpha\sin\beta}}.$$

Задача 6

Пусть R — радиус окружности. Обозначим $AK = KB = x$. Тогда

$R = \dfrac{BK}{2\sin\angle BCK} = \dfrac{CL}{2\sin\angle CBL}$,

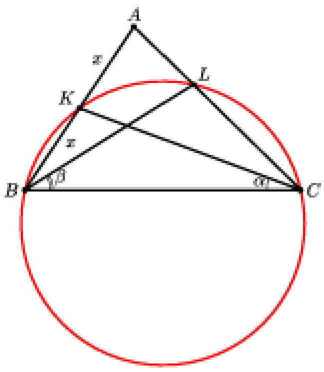
или $\dfrac{x}{2\sin\alpha} = \dfrac{CL}{2\sin\beta}$, откуда находим, что $CL = \dfrac{x\sin\beta}{\sin\alpha}$. По следствию из теоремы о касательной и секущей $AK \cdot AB = AL \cdot AC$, или $2x^2 = l\left(l + \dfrac{x\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$, или

$$2x^2 - \frac{xl\sin\beta}{\sin\alpha} - l^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень этого квадратного уравнения:

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{l\sin\beta}{\sin\alpha} + \sqrt{\frac{l^2\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + 8l^2}\right) = \frac{l}{4\sin\alpha}\left(\sin\beta + \sqrt{8\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\right).$$

Следовательно, $AB = 2x = \dfrac{l}{2\sin\alpha}\left(\sin\beta + \sqrt{8\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\right)$.



Ответ

$\dfrac{l}{2\sin\alpha}\left(\sin\beta + \sqrt{8\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\right)$.

Задача 7

Пусть биссектрисы углов $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 90^\circ$ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. По теореме о вписанных углах

$\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1 = \frac{1}{2}\angle A = 30^o$, $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1 = \frac{1}{2}\angle B = 15^o$,

поэтому

$\angle A_1C_1B_1 = \angle CC_1A_1 + \angle CC_1B_1 = 30^o + 15^o = 45^o$.

Аналогично находим, что $\angle B_1A_1C_1 = 60^o$ и $\angle A_1B_1C_1 = 75^o$. Пусть R — радиус окружности. Тогда

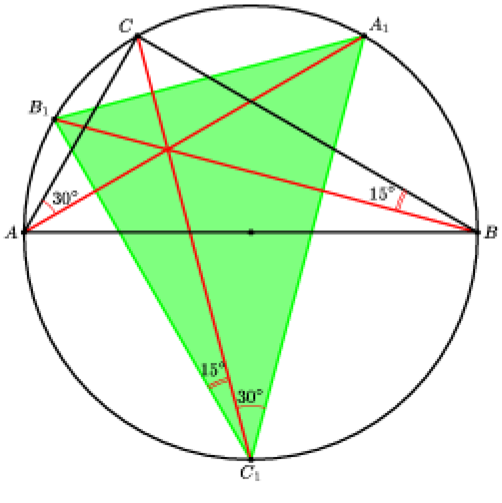
$AB = 2R$, $AC = R$, $BC = R\sqrt{3}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = 2$,

откуда находим, что $R^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$. По теореме синусов

$A_1C_1 = 2R \sin 75^o$, $B_1C_1 = 2R \sin 60^o$,

следовательно,

$S_{\Delta A1B1C1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1C_1 \sin 45^o = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin 75^o \cdot 2R \sin 60^o \cdot \sin 45^o = 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{3}$.



Ответ

$1 + \sqrt{3}$.

Задача 8

Пусть окружности радиусов r с центрами O_1 и O_2 касаются гипотенузы AB соответственно в точках M и N и при этом $\angle BAC = \alpha$. Если окружность с центром O_1 вписана в угол BAC, то $AM = O_1M \operatorname{ctg} \angle MAO_1 = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Аналогично находим, что $BN = r \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. Поскольку $c = AB = AM + MN + NB$ и $MN = O_1O_2 = 2r$, то имеем уравнение

$$r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 2r + r \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = c,$$

откуда находим, что $r = \frac{c}{2+\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Ответ

$$\frac{c}{2+\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Задача 9

Пусть окружности радиусов r с центрами O_1 и O_2 касаются гипотенузы AB соответственно в точках M и N, $BC = a$, $AC = b$ и при этом окружность с центром O_1 вписана в угол BAC. Обозначим $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{a}{b+c}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1+\cos \beta} = \frac{b}{a+c},$$

$$AM = \frac{O_1M}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{r(b+c)}{a}, \quad BM = \frac{O_2N}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{r(a+c)}{b}.$$

Поскольку $c = AB = AM + MN + NB$ и $MN = O_1O_2 = 2r$, то имеем уравнение

$$\frac{r(b+c)}{a} + 2r + \frac{r(a+c)}{b} = c,$$

откуда находим, что

$r = \dfrac{c}{2 + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}} = \dfrac{abc}{2ab + b^2 + bc + a^2 + ac} = \dfrac{abc}{(a+b)^2 + c(a+b)} =$

$\dfrac{abc}{(a+b)(a+b+c)} = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}$.

Ответ

$\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}$.

Задача 10

Поскольку трапеция *BCDE* вписана в окружность, то она равнобедренная. Заметим, что угол *CDE* — тупой, поэтому для любой точки *X*, отличной от *E* и лежащей на дуге *CE*, содержащей точку*D*, $CX < CE = 10$ (в треугольнике *CDE* против тупого угла лежит наибольшая сторона). Следовательно, точка не может лежать на этой дуге. Точка *A* не может лежать и на дуге *BC*, не содержащей точки *D* ($CB = DE < CE = 10$). Таким образом, точка *A* лежит на дуге *BE*, не содержащей точки *C*. Докажем равенство углов $\angle ACB$ и $\angle CED$. Действительно, $\angle BAC = \angle BEC = \angle DCE$, а т.к.

$\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE$ и $\angle CBE = \angle CAE = \angle CEA = \angle ADC$,

то

$\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = \angle ADE + \angle ADC = \angle CDE$.

Поэтому равны и углы $\angle ACB = \angle CED$ (как оставшиеся углы треугольников *ABC* и *CDE*). Следовательно, равны и хорды, на которые опираются эти углы, т.е. $AB = CD = 3$. Обозначим $\angle ABE = \angle ACE = \alpha$. Из треугольников *ABE* и *ACE* по теореме косинусов находим, что

$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos\alpha = 9 + 169 - 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot \cos\alpha = 178 - 78\cos\alpha$,

$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos\alpha = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha = 200 - 200\cos\alpha$.

Из уравнения $178 - 78\cos\alpha = 200 - 200\cos\alpha$ находим $\cos\alpha = \frac{11}{61}$. Тогда

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{11^2}{61^2}} = \frac{\sqrt{(61-11)(61+11)}}{61} = \frac{60}{61}$.

Поэтому

$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 13 \cdot \frac{60}{61} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 30}{61}$.

Пусть *CH* — высота равнобедренной трапеции *BCDE*. Тогда

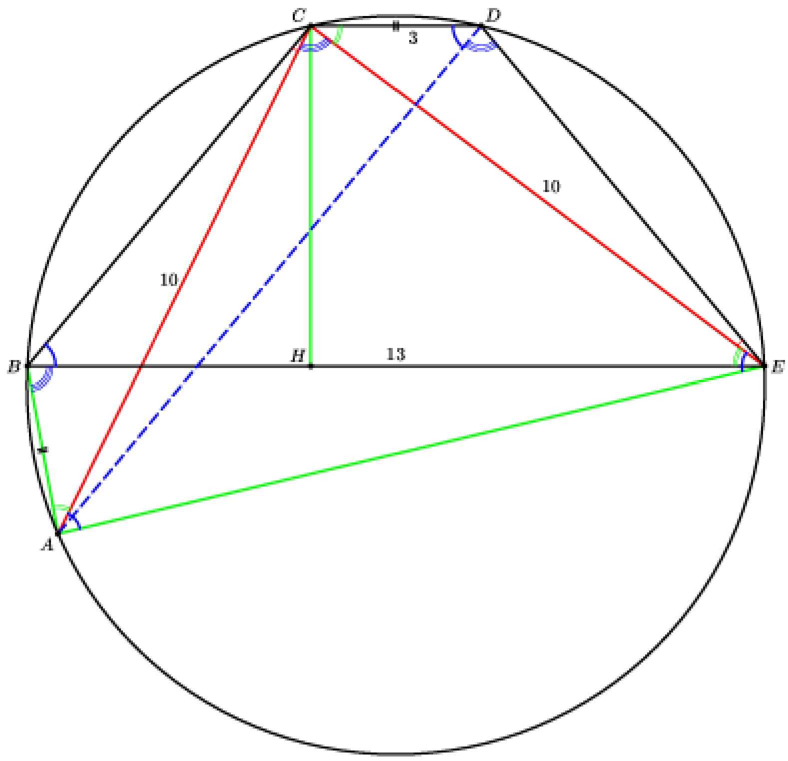
$EH = \frac{BE+CD}{2} = \frac{13+3}{2} = 8$.

Из прямоугольного треугольника *CHE* находим, что

$CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = \sqrt{100-64} = 6$.

Поэтому $S_{BCDE} = \frac{BE+CD}{2} \cdot CH = 8 \cdot 6 = 48$. Следовательно,

$S_{BCDEA} = S_{BCDE} + S_{\Delta ABE} = 48 + \frac{3 \cdot 13 \cdot 30}{61} = \frac{4098}{61}$.



Ответ

3; $\frac{4098}{61}$.

Задача 11

Пусть первая (вписанная) окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC соответственно в точках M и P, вторая (вневписанная) окружность касается продолжений сторон AB и BC соответственно в точках N и Q, а K — точка касания окружностей (K на стороне AC). По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки,

$$BN = BQ,\ BM = BP,\ MN = PQ,\ AM = AK = AN = \frac{1}{2}MN,\ CP = CK = CQ = \frac{1}{2}PQ,$$

поэтому $AB = BN - AN = BQ - CQ = BC$, т.е. треугольник ABC — равнобедренный. Его медиана BK является высотой. Пусть r и R — радиусы соответственно первой и второй окружностей. Тогда

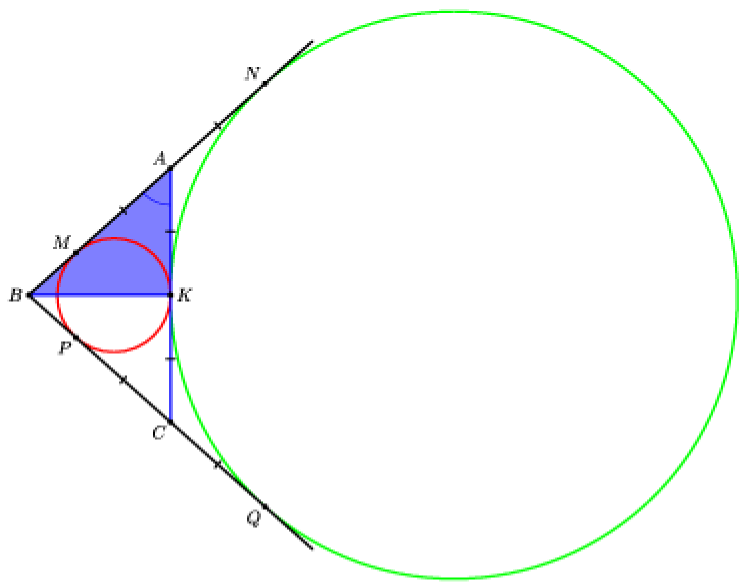
$$AC = MN = PQ = 2\sqrt{rR} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5},\ AK = \frac{1}{2}\cdot AC = 2\sqrt{5}.$$

Из прямоугольного треугольника BAK находим, что

$$AB = \frac{AK}{\cos\angle BAC} = \frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$AB + BC + AC = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 10\sqrt{5}.$$



Ответ

$10\sqrt{5}$.

Задача 12

Предположим, что все стороны данного пятиугольника *ABCDE* (*AB* = 6, *BC* = 8, *CD* = 7, *DE* = 9, *EA* = 4) касаются некоторой окружности. Обозначим касательные, выходящие из вершины *A*, через *x*. "Обойдем" наш пятиугольник, выражая последовательно длины касательных из вершин *B* (равны 6 - *x*), *C* (равны 8 - (6 - *x*) = 2 + *x*), *D* (равны 7 - (2 + *x*) = 5 - *x*) и *E* (равны 9 - (5 - *x*) = 4 + *x*). Получим, что сторона *AE* точкой касания делится на отрезки *x* и 4 + *x*, т.е. *x* = 0, что невозможно.

Задача 13

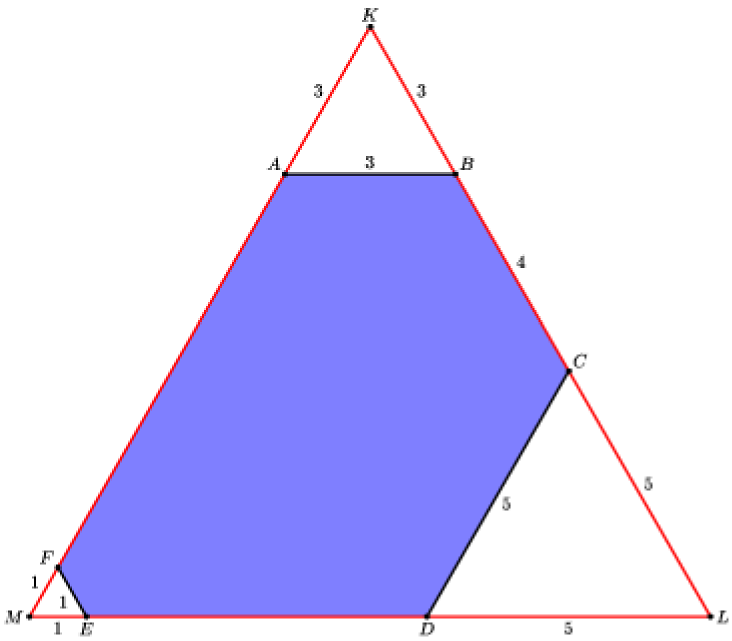
Пусть прямые *AF* и *BC* пересекаются в точке *K*, прямые *BC* и *DE* — в точке *L*, прямые *AF* и *DE* — в точке *M*. Поскольку сумма внутренних углов выпуклого шестиугольника равна $180^{\circ}(6 - 2) = 720^{\circ}$ и все эти углы равны, то каждый из них равен 120°. Тогда треугольники *AKB*, *CLD*, *EMF* и *KLM* — равносторонние. Поэтому

AK = *KB* = *AB* = 3, *CL* = *LD* = *CD* = 5, *EM* = *MF* = *EF* = 1,

KM = *ML* = *KL* = *KB* + *BC* + *CL* = 3 + 4 + 5 = 12.

Тогда

DE = *ML* - *ME* - *DL* = 12 - 1 - 5 = 6, *AF* = *KM* - *AK* - *MF* = 12 - 3 - 1 = 8.



Ответ

6 и 8.

Задача 14

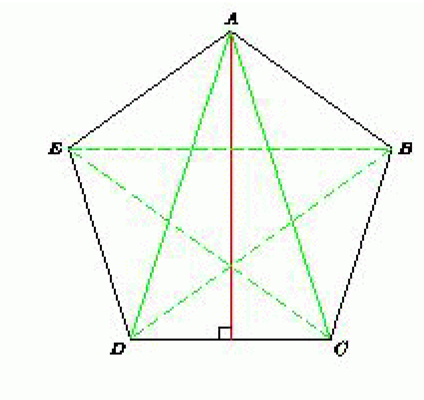
Для любого треугольника данного разбиения окружность, описанная около правильного 1997-угольника, является описанной. Поскольку центр окружности, описанной около правильного многоугольника с нечётным числом сторон, не лежит ни на одной диагонали, то он попадает внутрь какого-то одного треугольника. Треугольник остроугольный, если центр его описанной окружности лежит внутри треугольника, и тупоугольный, если центр описанной окружности лежит вне его. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности, остроугольный, а все остальные – тупоугольные.

Задача 15

Заметим, что медиана пятиугольника перпендикулярна противолежащей стороне тогда и только тогда, когда диагонали, проведённые из этой вершины, равны. Поэтому, если медианы, проведённые из вершин A , B , C и D перпендикулярны противолежащим сторонам, то

$AC = AD, BE = BD, CA=CE, DB = DA.$

Значит, $CE=BE$. Следовательно, медиана, проведённая из вершины E , также перпендикулярна противолежащей стороне.



Задача 16

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Докажем, что треугольник AA_1A_4 подобен треугольнику AA_2A_3.

Действительно,

$\angle A_1AA_4 = 180^\circ - \angle A_1BA_4 = \angle CBE = 180^\circ - \angle CDE = \angle A_2AA_3$.

Точки A_1 и A_4 лежат на окружности с диаметром AB, а точки A_2 и A_3 — на окружности с диаметром AD. Поэтому

$\angle AA_1A_4 = \angle ABE = \angle ADE = \angle AA_2A_3$.

Из доказанного следует, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_4}{AA_3}$. Отсюда находим, что

$AA_4 = AA_1 \cdot \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{ac}{b}$.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Докажем, что треугольник AA_1A_4 подобен треугольнику AA_2A_3.

Действительно,

$\angle A_1AA_4 = 180^\circ - \angle A_1BA_4 = \angle CBE = 180^\circ - \angle CDE = \angle A_2AA_3$.

Точки A_1 и A_4 лежат на окружности с диаметром AB, а точки A_2 и A_3 — на окружности с диаметром AD. Поэтому

$\angle AA_1A_4 = \angle ABE = \angle ADE = \angle AA_2A_3$.

Из доказанного следует, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_4}{AA_3}$. Отсюда находим, что

$AA_4 = AA_1 \cdot \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{ac}{b}$.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Докажем, что треугольник AA_1A_4 подобен треугольнику AA_2A_3.

Действительно,

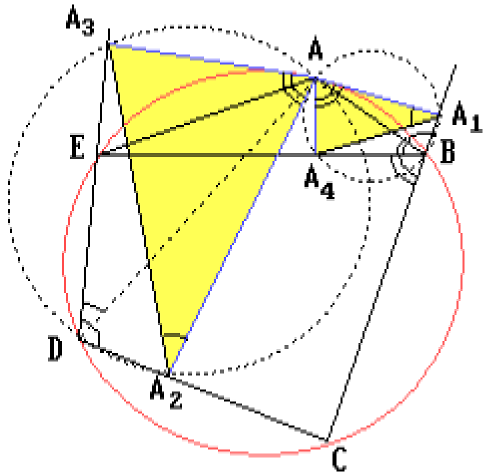
$\angle A_1AA_4 = 180^\circ - \angle A_1BA_4 = \angle CBE = 180^\circ - \angle CDE = \angle A_2AA_3$.

Точки A_1 и A_4 лежат на окружности с диаметром AB, а точки A_2 и A_3 — на окружности с диаметром AD. Поэтому

$\angle AA_1A_4 = \angle ABE = \angle ADE = \angle AA_2A_3$.

Из доказанного следует, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_4}{AA_3}$. Отсюда находим, что

$$AA_4 = AA_1 \cdot \frac{AA_3}{AA_2} = \frac{ac}{b}.$$



Ответ

$\frac{ac}{b}$.

Задача 17

Поскольку $AF \parallel CD$ и $AD = CF$, то четырёхугольник CDF — равнобедренная трапеция или прямоугольник. Поэтому

$$\angle FCD = \angle ADC = \angle DAF = \angle CFA = \alpha.$$

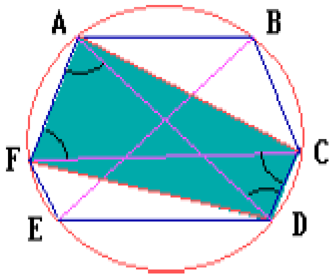
Аналогично выводится равенство двух других четвёрок углов. Обозначим их β и γ. Поскольку

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi$$

то

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Тогда $\angle CDA = \pi - \angle CBA$ и точка D лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C. Далее аналогично.



Задача 18

Пусть $R = 1$ — радиус окружности. Тогда

$$AE = 2R\sin\angle ABE = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, треугольник EAB — прямоугольный, $\angle A = 90^{o}$. Поэтому BE — диаметр окружности, $BE = 2$. Тогда

$$\angle BDE = 90^{o},\ BD = BE\cos 30^{o} = \sqrt{3},$$

$$\angle DCB = \frac{\cup DAB}{2} = \frac{\cup DE + \cup EAB}{2} = \frac{60^\circ + 180^\circ}{2} = 120^{o}.$$

Пусть CK — высота треугольника DCB. Тогда

$$CK = DK tg\angle BDC = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2}BD\cdot CK = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Кроме того,

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}AB\cdot AE = 1,\ S_{\Delta BDE} = \frac{1}{2}BD\cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$S_{ABCDE} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BDE} + S_{\Delta DCB} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ

$1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Задача 19

Пусть R — радиус окружности. Поскольку $\angle A = \angle C = \angle E$, то хорды BF, BD и DF — равны между собой. Поэтому треугольник BDF — равносторонний. Следовательно,

$\angle A = \angle C = \angle E = 120^\circ$, $BF = BD = DF = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$,

$S_{\Delta BDF} = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \sin 60^\circ = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Из треугольника ABF находим, что

$\sin\alpha = \sin\angle AFB = \frac{AB}{2R} = \frac{a}{2R}$,

$\sin\angle ABF = \sin(180^\circ - 120^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ - \alpha) =$

$= \sin 60^\circ \cos\alpha - \cos 60^\circ \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3(1-\sin^2\alpha)} - \sin\alpha\right) =$

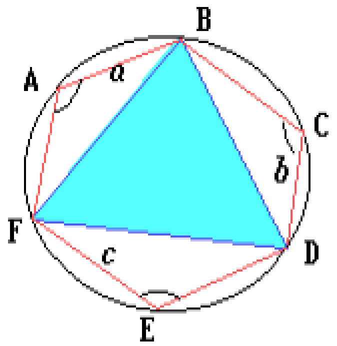
$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3 - 3\left(\frac{a}{2R}\right)^2} - \frac{a}{2R}\right) = \frac{\sqrt{12R^2 - 3a^2} - a}{4R}$.

Следовательно,

$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot BF \sin\angle ABF = \frac{1}{2} a \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{12R^2 - 3a^2} - a}{4R} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(a\sqrt{12R^2 - 3a^2} - a^2\right).$$

Аналогично находим площади треугольников *BCD* и *DEF*.



Ответ

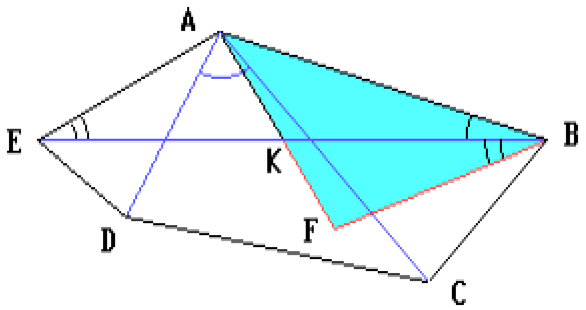
$$\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a\sqrt{12R^2 - 3a^2} - a^2 + b\sqrt{12R^2 - 3b^2} - b^2 + c\sqrt{12R^2 - 3c^2} - c^2\right).$$

Задача 20

Отложим на продолжении медианы *AK* за точку *K* отрезок *KF*, равный *AK*. Из равенства треугольников *BKF* и *EKA* следует, что $BF = AE = AD$ и $\angle KBF = \angle KEA$. Поэтому

$$\angle ABF = \angle ABK + \angle KBF = \angle DAC.$$

Кроме того, $AB = AC$ (по условию). Поэтому треугольники *ABF* и *CAD* равны. Следовательно, $CD = AF = 2AK$.



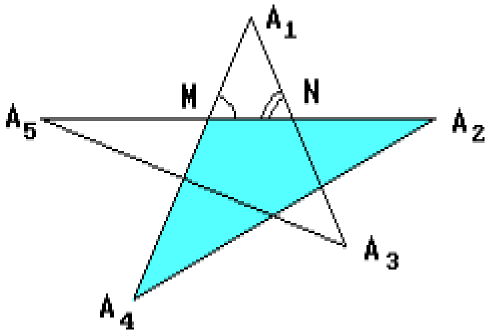
Задача 21

Обозначим вершины звезды последоветельно: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Пусть M - точка пересечения отрезков A_1A_4 и A_2A_5, а N - отрезков A_1A_3 и A_2A_5. Тогда $\angle A_1MN$ - внешний угол треугольника MA_2A_4, а $\angle A_1NM$ - треугольника NA_3A_5. Поэтому

$\angle A_1MN = \angle A_2 + \angle A_4$, $\angle A_1NM = \angle A_3 + \angle A_5$.

Следовательно,

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 = \angle A_1 + \angle A_1MN + \angle A_1NM = 180^o$.



Задача 22

Пусть продолжения боковых сторон *AD* и *BC* трапеции пересекаются в точке *K*. Из условия задачи следует, что *AB* — средняя линия треугольника *KDC*. Обозначим $AB = z$, $BQ = 3t$, $S\Delta_{AKB} = s$. Тогда

$DP = 2z$, $AK = AD = 3z$, $CQ = 4t$, $BK = BC = 7z$,

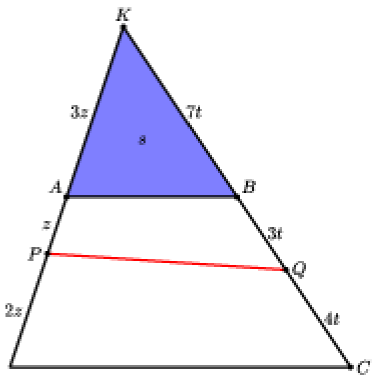
$S\Delta_{KDC} = 4s$, $S\Delta_{KPQ} = \frac{KP}{KD} \cdot \frac{KQ}{KC} \cdot S\Delta_{KDC} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{14} \cdot 4s = \frac{40}{21}s$,

$S_{ABQP} = S\Delta_{KPQ} - S\Delta_{AKB} = \frac{40}{21}s - s = \frac{19}{21}s$,

$S_{CDPQ} = S_{ABCD} - S_{ABQP} = 3s - \frac{19}{21} = \frac{44}{21}s$.

Следовательно,

$\frac{S_{ABQP}}{S_{CDPQ}} = \frac{19}{44}$.



Ответ

$\frac{19}{44}$.

Задача 23

Поскольку

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1-(-1);-2-3)} = \overrightarrow{(2;-5)}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(6-4);0-5)} = \overrightarrow{(2;-5)}$,

то $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Значит, данный четырёхугольник — параллелограмм, а т.к.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{(4-(-1);5-3)} = \overrightarrow{(5;2)}$,

то

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 = 0$,

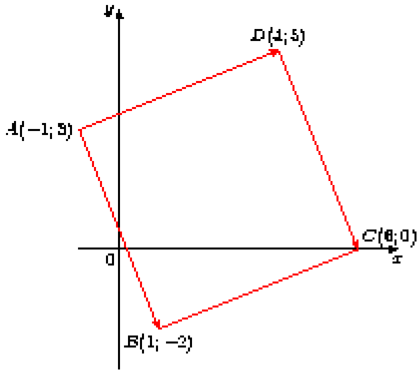
то $AB \perp AD$. Поэтому данный четырёхугольник — прямоугольник.

Осталось доказать, что равны его соседние стороны. Действительно, по формуле для расстояния между двумя точками

$AD = \sqrt{(4-(-1))^2+(5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$,

$AB = \sqrt{(1-(-1))^2+(-2-3)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

Что и требовалось доказать.



Задача 24

Рассмотрим сначала случай, когда обе прямые проходят через начало координат, т.е. когда их уравнения имеют вид $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Положив $x = 1$, найдём ординаты точек $M_1(1;y_1)$ и $M_2(1;y_2)$, лежащих на этих прямых:

$y_1 = k_1$ и $y_2 = k_2$.

Данные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны векторы $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{(1;k_1)}$ и $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{(1;k_2)}$, т.е. когда

$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 1 \cdot 1 + k_1 \cdot k_2 = 0.$

Следовательно, равенство $k_1k_2 = -1$ есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых $y = k_1x$ и $y = k_2x$.

Поскольку угол между прямыми $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ равен углу между прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$, то доказанное утверждение верно и для исходных прямых.

Задача 25

Поскольку

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(6-(-2);-1-3)} = \overrightarrow{(8;-4)}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{(-3-2);-4-6)} = \overrightarrow{(-5;-10)}$,

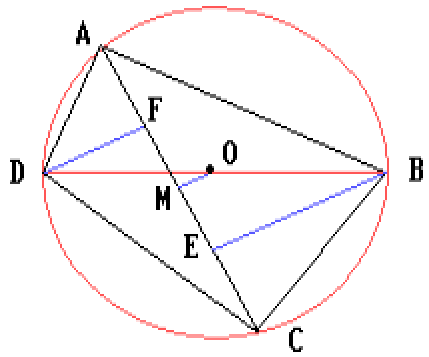
то

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 8 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-10) = 0.$

Следовательно, $AC \perp BD$.

Задача 26

Поскольку из точек A и C отрезок BD виден под прямым углом, то точки A и B лежат на окружности с диаметром BD. Опустим перпендикуляр OM из центра O этой окружности на диагональ AC. Тогда $AM = MC$ и $ME = MF$ как проекции равных радиусов OB и OD на AC. Следовательно, $CE = FA$.



Задача 27

Поскольку

$AB = BK = CK = CL$,

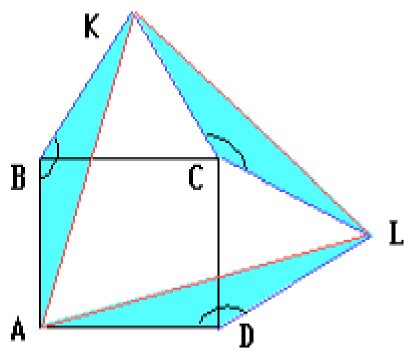
$\angle ABK = \angle ABC + \angle CBK = 90^o + 60^o = 150^o$,

$\angle KCL = 360^o - \angle DCL - \angle DCB - \angle BCK =$

$= 360^o - 60^o - 90^o - 60^o = 150^o$,

то треугольники ABK и KCL равны по двум сторонам и углу между ними.

Следовательно, $KL = AK$. Аналогично $KL = AL$.



Задача 28

Пусть AB и CD - две параллельные хорды окружности с центром O. Через точку O проведем прямую l, перпендикулярную этим хордам. Пусть при этом точки A и C лежат по одну сторону от прямой l. Поскольку окружность симметрична относительно каждого своего диаметра, при симметрии относительно прямой l точка A перейдет в точку B, а точка C - в точку D. Каждая точка дуги AC, лежащая между параллельными прямыми AB и CD перейдет в точку дуги BD, также лежащую между этими прямыми. Т.о., при симметрии относительно прямой l одна из рассматриваемых дуг перейдет в другую. Следовательно, эти дуги равны.

Задача 29

Пусть ABC - произвольный треугольник, у которого $AB = a$ - данная сторона, $CH = h$ - данная высота. Точка C лежит на прямой l, параллельной AB и расположенной на расстоянии h от прямой AB. Рассмотрим точку B_1, симметричную вершине B относительно прямой l. Пусть отрезок AB_1 пересекает прямую l в точке M. Тогда $AC + BC = AC + B_1C \geq AB_1 = AM + MB_1 = AM + MB$, причем равенство достигается, когда точки A, C и B_1 лежат на одной прямой, т.е. когда точка C совпадает с точкой M. В этом случае треугольник ABC равнобедренный, $AC = BC$.

Задача 30

Пусть вершины K, L, M и N прямоугольника $KLMN$ расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Обозначим

$AK = a$, $BK = b$, $BL = c$ и $CL = d$.

Тогда $CM = a$, $DM = b$, $DN = c$ и $AN = d$, причем $a \neq c$, т.к. в противном случае $KLMN$ - квадрат. Тогда

$d/a = AN/AK = tg\angle AKN = tg\angle BLK = BK/BL = b/c$,

значит, $ab = cd$. Кроме того, $a + b = c + d$. Из полученных равенств следует, что либо $a - b = c - d$, что невозможно, либо $a - b = d - c$. В последнем случае $a = d$ и $b = c$. Тогда $\angle AKN = 45^\circ$ и $\angle BKL = 45^\circ$. Следовательно, $KN \parallel BD$ и $KL \parallel AC$.