

Задача 1

Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d . Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B , произведение $MA \cdot MB$ одно и то же. Чему оно равно?

Задача 2

В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E , а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C , D и E , пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF . Найдите высоту трапеции и её основания.

Задача 3

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Найдите её длину, если $BC = CE$, площадь треугольника ADE равна площади треугольника CDE , площадь треугольника ABC равна площади треугольника BCD , а $3AC + 2BD = 5\sqrt{5}$.

Задача 4

В треугольнике ABC биссектрисы углов при вершинах A и C пересекаются в точке D . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус окружности с центром в точке O , описанной около треугольника ADC , равен $R = 6$, и $\angle ACO = 30^\circ$.

Задача 5

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A . Найдите радиус окружности, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и площадь треугольника ABC равна S .

Задача 6

Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке L . Найдите AB , если $AK = KB$, $AL = l$, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBL = \beta$.

Задача 7

Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30° , 60° и 90° , а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

Задача 8

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c , а один из острых углов равен α . В треугольник помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

Задача 9

Внутри прямоугольного треугольника помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найдите радиусы этих окружностей, если катеты треугольника равны a и b .

Задача 10

В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около трапеции $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $CA = 10$. Найдите длину отрезка BA и площадь пятиугольника $ABCDE$.

Задача 11

Даны две окружности. Первая окружность вписана в треугольник ABC , вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC . Известно, что эти окружности касаются друг друга, произведение их радиусов равно 20, а угол BAC равен $\arccos \frac{2}{3}$. Найдите периметр треугольника ABC .

Задача 12

Докажите, что если стороны пятиугольника в порядке обхода равны 4, 6, 8, 7 и 9, то его стороны не могут касаться одной окружности.

Задача 13

В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найдите длины сторон DE и AF .

Задача 14

Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один – остроугольный.

Задача 15

Медианой пятиугольника $ABCDE$ назовём отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (A – с серединой CD , B – с серединой DE и т.д.). Докажите, что если четыре медианы выпуклого пятиугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то таким же свойством обладает и пятая медиана.

Задача 16

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b и c . Найдите расстояние от вершины A до прямой BE .

Задача 17

В шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ и $AD = BE = CF$. Докажите, что около этого шестиугольника можно описать окружность.

Задача 18

Пятиугольник $ABCD$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $AB = \sqrt{2}$, $\angle ABE = 45^\circ$, $\angle EBD = 30^\circ$ и $BC = CD$. Найдите площадь пятиугольника.

Задача 19

В окружность радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle A = \angle C = \angle E$, $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

Задача 20

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .

Задача 21

Найдите сумму углов при вершинах самопересекающейся пятиконечной звезды.

Задача 22

В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

Задача 23

Даны точки $A(-1; 3)$, $B(1; -2)$, $C(6; 0)$ и $D(4; 5)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — квадрат.

Задача 24

Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ и не параллельные координатным осям, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Задача 25

Даны точки $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$ и $D(-3; -4)$. Докажите, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны.

Задача 26

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = FA$.

Задача 27

На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL - правильный.

Задача 28

Докажите, что дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

Задача 29

Постройте треугольник с наименьшим возможным периметром по данным стороне и проведенной к ней высоте.

Задача 30

Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.