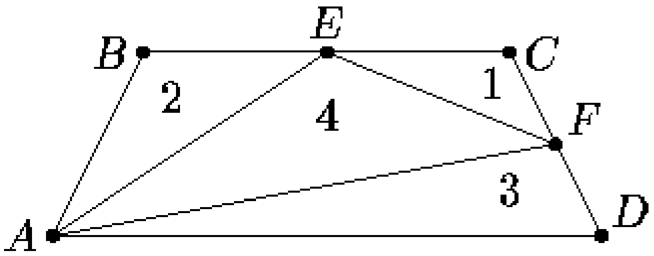
Задача 1

Условие

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF, BF делят четырёхугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее значение площади треугольника ABD?

Ответ: 6.

Решение. Пусть площади треугольников равны n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда площадь четырёхугольника $ABCD$ составляет $4n+6$. Площадь треугольника BCD равна учетверённой площади треугольника ECF. Значит, $S_{ABD}=S_{ABCD}-S_{BCD}\leq(4n+6)-4n=6$.
Равенство достигается, если треугольник ECF имеет наименьшую площадь из указанных четырёх треугольников.



Осталось доказать, что значение 6 является возможным. Примером служит равнобедренная трапеция с основаниями $AD=6$, $BC=4$ и высотой 2 (числа на рисунке обозначают площади треугольников).

Задача 2

Условие

Дан треугольник ABC. Найдите на прямой AB точку M для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM была бы наименьшей.

Решение

По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ACM и BCM равны $AC/(2 \sin AMC)$ и $BC/(2 \sin BMC)$ соответственно. Легко проверить, что $\sin AMC = \sin BMC$. Поэтому $AC/(2$

$\sin AMC) + BC/(2 \sin BMC) = (AC+BC)/(2 \sin BMC)$. Последнее выражение будет наименьшим, если $\sin BMC = 1$, т. е. $CM \perp AB$.

Задача 3

Условие

Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключённый между сторонами угла, делится в точке A пополам.

Решение

Пусть PQ — отрезок, который делится точкой A пополам, $P''Q''$ — другой отрезок, проходящий через точку A. Покажем, что отрезок $P''Q''$ отсекает треугольник большей площади, чем отрезок PQ. Пусть для определённости $P''A \geq Q''A$. Отложим на отрезке AP'' отрезок $AP'''' = AQ''$. Треугольники APP'''' и AQQ'' равны, а треугольник APP'' содержит треугольник APP''''. Значит, площадь треугольника APP'' больше площади треугольника AQQ''. Разность между площадями треугольников, отсекаемых отрезками $P''Q''$ и PQ, равна разности площадей треугольников APP'' и AQQ''.

Задача 4

Условие

В данный треугольник поместить центрально-симметричный многоугольник наибольшей площади.

Решение

Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T = ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник. Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x : y : z$, где $x + y + z = 1$. Тогда отношение суммы площадей треугольников, прилегающих к вершинам A, B, C, к площади треугольника ABC равно $x^2 + y^2 + z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1 = (x + y + z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x - y)^2 - (y - z)^2 - (z - x)^2$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1/3$, причем равенство достигается только при $x = y = z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, ABC_1, A_1B_1C, например внутри AB_1C_1. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причем если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x = 0$). Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна 2/3 площади треугольника.

Задача 5

Условие

В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

Решение

Ответ: третья сторона должна быть равна наибольшей из сторон a и b. Пусть для определённости $a \geq b$. Рассмотрим полуокружность радиуса a. Пусть A — центр этой полуокружности, C — точка на диаметре, для которой $AC = b$. Вершина B расположена на этой полуокружности. Наибольшая сторона треугольника — это a или c, поэтому наибольший угол — это A или C. Выберем вершину B так, чтобы она лежала на серединном перпендикуляре к отрезку AC (это эквивалентно тому, что $a = c$). Если вершина B смещается по полуокружности из этого положения, то увеличивается либо угол A, либо угол C (в зависимости от того, в какую сторону она смещается).

Задача 6

Условие

Кузнечик вначале сидит в точке M плоскости 0xy вне квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ (координаты M - нецелые, расстояние от M до центра квадрата равно d). Кузнечик прыгает в точку, симметричную M относительно самой правой (с точки зрения кузнечика) вершины квадрата. Докажите, что за несколько таких прыжков кузнечик не сможет удалиться от центра квадрата более чем на 10d.

Решение

Разобьём плоскость на квадраты со стороной 1. Так как координаты точки M — не целые числа, то кузнечик никогда не попадёт на границы квадратов. Следовательно, если мы знаем в каком квадрате находился кузнечик до прыжка, то мы можем определить в каком квадрате находится кузнечик после прыжка (самая правая вершина квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ не зависит от выбора точки внутри квадрата разбиения, а зависит лишь от квадрата). Легко проверить, что после любого количества прыжков кузнечик будет находиться в одном из заштрихованных квадратов (рис. 1). Осталось заметить, что отношение максимального расстояния от центра квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ до точек заштрихованной фигуры к минимальному расстоянию не превосходит 10.

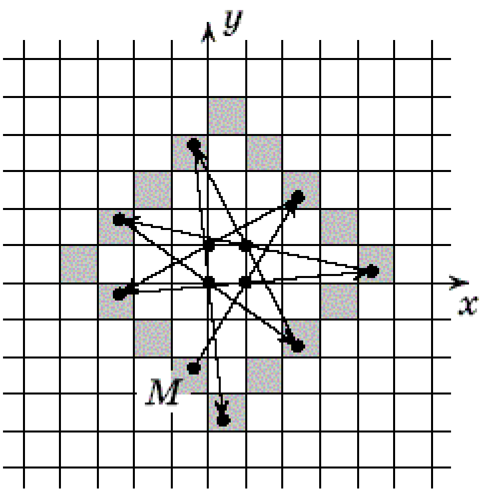


Рис. 1

Задача 7

Условие

Точки A и B взяты на графике функции y=1/x, x>0. Из них опущены перпендикуляры на ось абсцисс, основания перпендикуляров - H_A и H_B; O - начало координат. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямыми OA, OB и дугой AB, равна площади фигуры, ограниченной прямыми AH_A, BH_B, осью абсцисс и дугой AB.

Решение

Можно считать, что абсцисса точки A меньше абсциссы точки B (рис. 10.1). Рассмотрим точку K пересечения отрезков AH_A и OB. Тогда разность рассматриваемых площадей равна разности площадей треугольника OAK и четырёхугольника H_AKBH_B, которая, в свою очередь, равна разности площадей треугольников OAH_A и OBH_B. А поскольку $OH_A*AH_A=OH_B*BH_B=1$ (вспомните, что A и B лежат на графике), эти площади равны между собой.

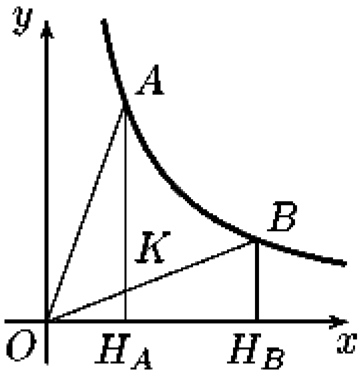


Рис. 10.1

Задача 8

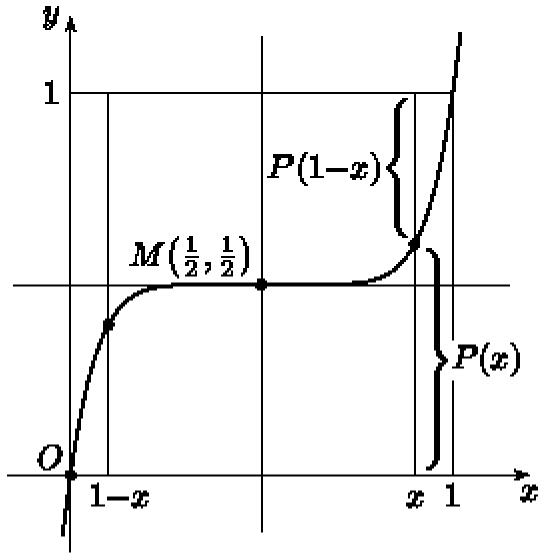
Условие

Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого выполняется тождество

$P(x)+P(1-x)=1$.

Решение

Например, $P(x)=2^{2000}(x-(1/2))^{2001}+(1/2)$. График этой функции (рис.) получается из графика нечётной функции $y=x^{2001}$ сдвигом вправо на 1/2, растяжением и сдвигом вверх на 1/2 и поэтому имеет центр симметрии $M(1/2;\ 1/2)$. Теперь легко понять, что $P(1\text{-}x)=1\text{-}P(x)$.



Задача 9

Условие

Докажите, что на графике функции $y=x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y=x^3+|x|+1$ - такую точку B, что расстояние AB не превышает 1/100.

Решение

Положим $t=100$. Точка B с координатами $(t,\ c)$, где $c=t^3+t+1$, очевидно, лежит на графике функции $y=x^3+|x|+1$.

Рассмотрим положительное число $r=c^{1/3}\text{-}t$. Тогда $(t+r)^3=c$, следовательно, точка A с координатами $(t+r,\ c)$ лежит на графике функции $y=x^3$.

Расстояние между точками A и B равно r. Но из равенства $(t+r)^3=c=t^3+t+1$ следует, что $3t^2r+3tr^2+r^3=t+1$, $3t^2r<t+1$, $r<(t+1)/(3t^2)=101/(3*100*100)<1/100$.

Задача 10

Условие

Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

Решение

Ответ: существует. Например, подходит функция $f(x) = x^3$. Действительно, с вертикальной прямой $x = a$ её график пересекается в точке (a, a^3). Пусть теперь прямая задана уравнением $y = kx + b$. Тогда уравнение $x^3 - kx - b = 0$ имеет действительный корень x_0 (так как многочлен нечётной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень). Следовательно, график функции fпересекается с прямой $y = kx + b$ (например, в точке (x_0, x_0^3)).

Задача 11

Условие

На какое максимальное число частей могут разбить координатную плоскость x0y графики 100 квадратных трехчлёнов вида $y=a_nx^2+b_nx+c_n$ (n = 1, 2, ..., 100)?

Решение

Докажем, что искомое число равно $100^2 + 1$. Для этого достаточно доказать, что n парабол указанного вида могут разбить плоскость не более чем на $n^2 + 1$ частей, и привести пример разбиения на такое количество частей. Первое утверждение будем доказывать по индукции. Если $n = 1$, то плоскость разбивается на $2 = 1^2 + 1$ частей. Это — база индукции. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо для $n = k – 1$. Докажем его для $n = k$. Для этого рассмотрим $k – 1$ парабол вида $y = a_nx^2 + b_nx + c_n$. Точки пересечения k-й параболы с остальными разбивают её на r кусков, при этом количество точек пересечения $r – 1$ и количество частей разбиения увеличивается на r.
Заметим, что у двух парабол точек пересечения не более 2, так как их абсциссы являются корнями квадратного уравнения. Значит, общее число точек пересечения $r – 1$ не превосходит $2(k – 1)$. Таким образом, в силу индуктивного предположения, число частей разбиения k параболами не превосходит $2(k – 1) + 1 + (k – 1)^2 + 1 = k^2 + 1$, и требуемое утверждение доказано.
Построим теперь разбиение плоскости 100 параболами вида $y = a_nx^2 + b_nx + c_n$ на $100^2 + 1$ частей. Для этого будем рассматривать параболы вида $y = a_n(x – n)^2$, где $a_i > 0$, $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$. Если доказать, что любые две параболы такого вида пересекаются в двух точках и никакие три не пересекаются, то предыдущее рассуждение показывает, что число частей разбиения будет максимальным. Докажем это. Пусть $r = k$, абсциссы точек

пересечения соответствующих парабол удовлетворяют квадратному (в силу предположений о коэффициентах) уравнению $a_r(x - r)^2 = a_k(x - k)^2$. Легко видеть, что это уравнение имеет два корня, а значит, у парабол две точки пересечения. Отсутствия же точек пересечения сразу трёх парабол можно добиться, выбрав подходящие коэффициенты. Итак, некоторое семейство парабол указанного вида даёт разбиение плоскости на максимальное количество частей.

Задача 12

Условие

Даны три параллельные прямые на равных расстояниях друг от друга. Как надо изображать точками соответствующих прямых величины сопротивления, напряжения и силы тока в проводнике, чтобы, прикладывая линейку к точкам, изображающим значения сопротивления R и значения силы тока I, получить на шкале напряжения точку, изображающую величину напряжения $V = I \cdot R$(точка каждой шкалы изображает одно и только одно число).

Решение

Пусть некоторая прямая пересекает данные прямые в точках O_1, O_2, O_3. Введём на данных прямых координаты x, y, z с началами координат в точках O_1, O_2, O_3 (единица длины одна и та же и направления осей одни и те же). Положим $I = 10^x$ (т.е. точке с координатой x мы сопоставляем силу тока $I = 10^x$), $R = 10^{-2y}$ и $U = 10^{-z}$. Точки с координатами x, y, z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $x + z = 2y$, т.е. $10^{-z} = 10^x \cdot 10^{-2y}$. Это означает, что $V = I \cdot R$.

Задача 13

Условие

Существует ли на координатной плоскости прямая относительно которой симметричен график функции $y = 2^x$?

Решение

Ответ: не существует. Действительно, если график функции $y = 2^x$ симметричен относительно некоторой прямой, то при симметрии относительно этой прямой горизонтальная асимптота $y = 0$ этого графика должна перейти в некоторую асимптоту этого графика. Но у графика функции $y = 2^x$ нет других асимптот. Следовательно, при этой симметрии прямая $y = 0$ переходит в себя, а значит, ось симметрии либо совпадает с прямой $y = 0$, либо перпендикулярна ей. Проверка того, что прямая $y = 0$ и прямые вида $x = const$ не являются осями симметрии графика функции $y = 2^x$, оставляется читателю в качестве упражнения.

Задача 14

Условие

Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Решение

Предположим противное, что ни из каких трёх отрезков нельзя составить треугольник. Рассмотрим длины отрезков в сантиметрах по возрастанию: $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, l_3, l_4, ..., $l_{10} = 50$. Так как из трёх самых коротких отрезков нельзя составить треугольник, то $l_3 \geq l_1 + l_2 = 1 + 1 = 2$. Аналогично, $l_4 \geq l_2 + l_3 \geq 1 + 2 = 3$. Далее,
$l_5 \geq 2 + 3 = 5$
$l_6 \geq 3 + 5 = 8$
$l_7 \geq 5 + 8 = 13$
$l_8 \geq 8 + 13 = 21$
$l_9 \geq 13 + 21 = 33$
$l_{10} \geq 21 + 33 = 55$
Противоречие с условием $l_{10} = 50$ доказывает утверждение.