

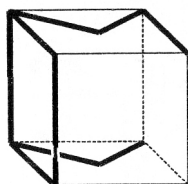
## Краевая олимпиада

### «Математика в решении мультидисциплинарных задач»

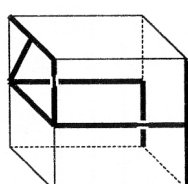
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2013 г. Очный тур. 9 класс

#### Задание 1. (4 б.)

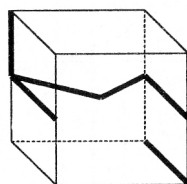
На рис. 1-4 изображены кубы, на гранях которых проведены жирные линии. Если посмотреть на куб спереди, слева и сверху, то на каждом из этих видов линии образуют букву. Запишите получившиеся трехбуквенные слова.



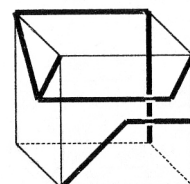
1



2



3



4

Ответ: 1- сом, 2 – час, 3 – чум, 4 – ямб.

Критерии: за каждый верный ответ по одному баллу.

#### Задание 2. (6 б.)

Два вида удобрений  $A$  и  $B$  отличаются содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении  $A$  азота содержится в три раза больше, а фосфора в два раза больше по весу, чем калия. В удобрении  $B$  соответственно азота в  $5/3$  раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли с помощью смешивания удобрений  $A$  и  $B$  приготовить удобрение, в котором азота будет в два, а фосфора в три раза больше, чем калия? Обоснуйте свой ответ.

Решение: Пусть первого удобрения взяли  $x$  кг, а второго  $y$  кг. Тогда калия, азота и фосфора и в смеси окажется соответственно  $x + y$ ,  $3x + \frac{5}{3}y$ ,  $2x + \frac{2}{3}y$  частей.

Соотношение азота к калию и фосфора к калию в смеси по условию задачи должно иметь вид:

$$\begin{cases} 3x + \frac{5}{3}y = 2(x + y), \\ 2x + \frac{2}{3}y = 3(x + y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y, \\ 3x = -8y. \end{cases}$$

Данная системе имеет только тривиальное решение  $(0;0)$ , но  $x > 0$  и  $y > 0$ . Так что такую смесь изготовить нельзя.

Задачу также можно решить качественно: так как в каждом удобрении азота больше, чем фосфора, то же самое будет и в смеси. Следовательно, требуемую смесь изготовить нельзя, поскольку в смеси азота должно быть меньше, чем фосфора.

Ответ: Такую смесь изготовить нельзя.

Критерии:

- Дан верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 1 б.
- Дан верный ответ только с качественным обоснованием – до 4 б.
- Верно составлено уравнение, описывающее соотношение веществ в третьей смеси – по 2 б за каждое уравнение, итого 4 б.
- Верно решена система уравнений и сделан вывод о невозможности изготовления смеси – 2 б.

Задание 3. (8 б.)

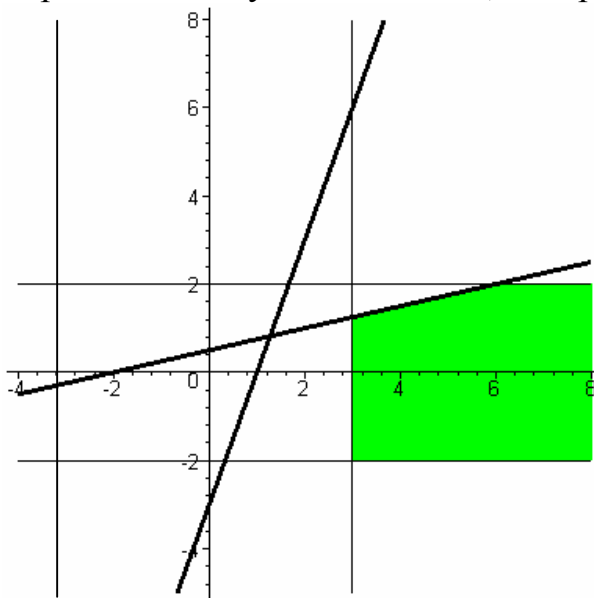
На координатной плоскости нарисуйте множество точек, координаты которых являются решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x - y \geq 3, \\ -x + 4y \leq 2, \\ x^2 > 9, \\ y^2 < 4. \end{cases}$$

Решение и ответ: систему можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} y \leq 3(1 - x), \\ y \leq \frac{2 + x}{4}, \\ -2 < y < 2, \\ \begin{cases} x > 3, \\ x < -3. \end{cases} \end{cases}$$

Проведем на координатной плоскости прямые  $y = 3(1 - x)$ ,  $y = \frac{2 + x}{4}$ ,  $y = 2$ ,  $y = -2$ ,  $x = 3$ ,  $x = -3$ . и заштрихуем нужные области. В результате пересечения всех областей решений неравенств получится область, изображенная на рис.

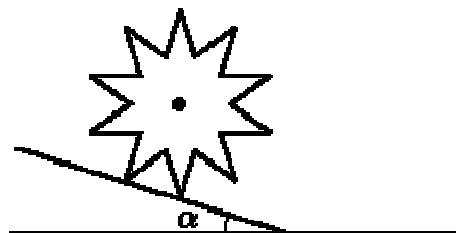


Критерии:

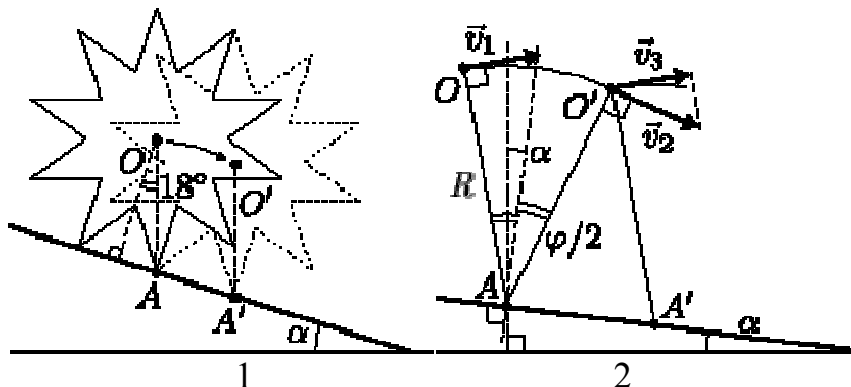
- Верно построены области, являющиеся решениями неравенств 1 и 2 системы, – по 1 б.
- Верно построены области, являющиеся решениями неравенств 3 и 4 системы, – по 2 б.
- Верное найдено пересечение решений неравенств 1-4 – 2 б.
- Неравенства 3 и 4 системы верно решены аналитически, но соответствующие области не построены – 1 б.

Задание 4. (10 б.)

На тяжёлую ось насажены два лёгких колеса в форме десятиугольных звёздочек. Эта конструкция может скатываться без проскальзывания с наклонной плоскости (на рис. изображен вид сбоку). Конструкция покоится. Затем угол  $\alpha$  начинают постепенно увеличивать. При каком значении угла  $\alpha$  конструкция покатится? Поясните и проиллюстрируйте свое решение.



Решение: Конструкция покатится при таком угле, при котором центр масс, находящийся на оси  $O$  (см. рис. 1), окажется над точкой опоры  $A$  или правее неё. Значит, искомый угол  $\alpha \geq \frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ .



Ответ:  $\alpha \geq 18^\circ$ .

Критерии:

- Верно указана идея о расположении центра масс – 4 б.
- Верно построен рис. 1 – 3 б.
- Верно определен угол – 3 б.

Задание 5. (12 б.)

Гидрометцентр в течение некоторого периода времени ежедневно предсказывал погоду. За этот период 90% всех дней были ясными. Гидрометцентр за это время предсказывал верную погоду в 74 случаях из 100, причем в 80% случаев, когда на день приходилась ясная погода, предсказания

Гидрометцентра сбылись. Какую долю среди пасмурных дней составляют те дни, когда Гидрометцентр предсказывал правильную погоду?

Решение: Пусть  $x$  дней велись наблюдения, тогда ясных дней было  $0,9x$ , причем  $0,8 \cdot 0,9x = 0,72x$  дня Гидрометцентр верно ее предсказывал. Всего же Гидрометцентр не ошибся в  $0,74x$  случаях. Стало быть, верно предсказанная пасмурная погода прилась на  $0,74x - 0,72x = 0,02x$  дней. Всего же пасмурных дней было  $x - 0,9x = 0,1x$ . Таким образом, верно предсказанные пасмурные дни среди всех пасмурных дней составят  $\frac{0,02x}{0,1x} 100\% = 20\%$ .

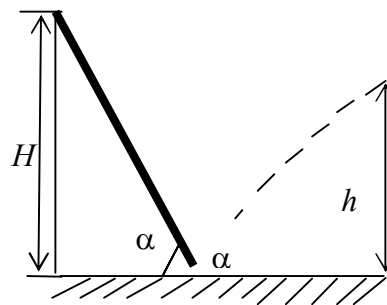
Ответ: 20%.

Критерии:

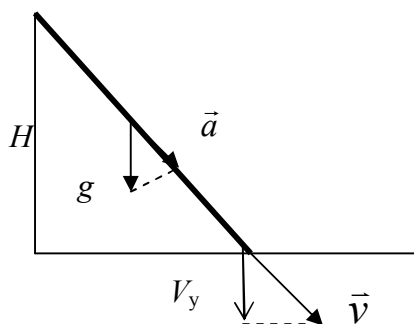
- Верно определено количество дней, когда Гидрометцентр правильно предсказал ясную погоду – 4 б.
- Верно определено количество дней, когда Гидрометцентр правильно предсказал пасмурную погоду – 4 б.
- Верно определено доля пасмурных дней, когда погода предсказана правильно – 4 б.
- Решение в целом верное, но недостаточно обосновано – до 10 б.

#### Задание 6. (14 б.)

Шарик соскальзывает с высоты  $H = 1$  м по наклонной плоскости под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонтальному полу и упруго с ним соударяется. Какова наибольшая высота подъема шарика после удара? Трением пренебречь.



Решение:



Движение шарика по наклонной плоскости происходит с ускорением  

$$a = g \sin \alpha.$$

Пройденный путь:

$$l = H / \sin \alpha$$

и время движения  $t$  связаны уравнением кинематики

$$l = at^2 / 2.$$

В момент удара скорость шарика равна

$$v = g \sin \alpha \cdot t,$$

а величина ее вертикальной составляющей

$$v_y = v \sin \alpha = g \sin^2 \alpha \cdot t$$

При упругом ударе модуль вертикальной скорости не изменится, поэтому высота подъема

$$h = v_y^2 / 2g.$$

Подстановка выражений  $v_y$  и  $t$  дает величину:

$$h = H \sin^2 \alpha.$$

Подставляя заданные величины, получаем  $h = 0,75 \text{ м}$

Ответ: 0,75 м.

Критерии:

- Верно записаны уравнения движения вдоль наклонной плоскости – 3 б.
- Верно найдены скорости после удара – 4 б.
- Верно замечено, что модуль вертикальной скорости не изменится – 4 б.
- Верно получен численный ответ – 3 б.

#### Задание 7. (16 б.)

Среди изолированной группы людей численностью  $N=1500$  человек распространяется эпидемия простуды. В любой момент времени всех участников группы можно поделить на инфицированных  $I(t)$  и здоровых  $H(t)$ . При этом количество инфицированных увеличивается пропорционально числу инфицированных и числу здоровых людей в данный момент времени с коэффициентом передачи болезни  $\alpha=0,001$ , и уменьшается пропорционально числу инфицированных с коэффициентом излечения  $\beta=0,1$ . Уже излечившийся человек может заразиться простудой повторно. На момент начала эпидемии в данной группе было  $I_0=200$  инфицированных. Считая, что подсчет числа инфицированных происходит один раз в день, найдите численность каждой из групп к концу третьего дня после начала эпидемии (при получении дробных значений для численности групп используйте округление). Сделайте выводы о динамике эпидемии.

Решение и ответ:

Численность инфицированных и здоровых участников группы в конце каждого дня определяется формулами:

$$I_i = I_{i-1} + \alpha I_{i-1} H_{i-1} - \beta I_{i-1},$$

$$H_i = N - I_i.$$

где  $I_i$  и  $H_i$  - численность групп в конце  $i$ -го дня,  $i=1..3$ .

Подставляя указанные значения, можно заполнить следующую таблицу:

| день  | 0    | 1    | 2   | 3    |
|-------|------|------|-----|------|
| $I_i$ | 200  | 440  | 862 | 1326 |
| $H_i$ | 1300 | 1060 | 638 | 174  |

Эпидемия стремительно распространяется и к концу третьего дня охватит почти всю группу.

Критерии:

- Верно составлены (или использованы для вычислений) уравнения 1, 2 – 10 б.
- Уравнение 1 составлено (или использовано для вычислений) частично верно – до 8 б.
- Верно определено количество инфицированных и здоровых людей в конце каждого из дней – по 1 б. за день, итого 3 б.
- Верно сделаны выводы о динамике эпидемии – 3 б.

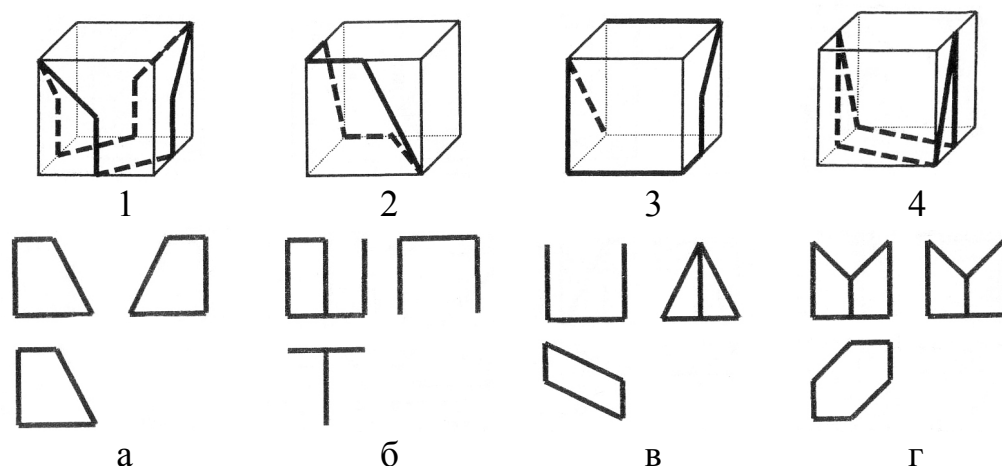
## Краевая олимпиада

### «Математика в решении мультидисциплинарных задач»

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2013 г. Очный тур. 10 класс

#### Задание 1. (4 б.)

На рис. 1-4 изображены кубы, на поверхности которых проведены жирные ломанные линии. На рис. а-г изображены проекции ломанных спереди, сверху и сбоку. Для всех ли ломанных приведены проекции? Сопоставьте ломанную с ее проекциями.



Ответ: Не всем ломанным соответствуют проекции; 1 – г, 2 – а, 3 – нет, 4 – в.

Критерии: за каждый правильный ответ по одному баллу, 1 балл за наблюдение о том, что проекции есть не для всех ломанных.

#### Задание 2. (6 б.)

Найти значение выражения  $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$  при  $x \in [1; 2]$ .

Решение: Первый способ. Произведем преобразования:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \\ &= |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|. \end{aligned}$$

Поскольку  $x \in [1; 2]$ , значит  $\sqrt{x-1} \in [0; 1]$ , тогда  $\sqrt{x-1}-1 \in [-1; 0]$  и  $\sqrt{x-1}+1 \in [1; 2]$ . Следовательно,

$$|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1| = 1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1 = 2.$$

Второй способ. Обозначим выражение новой переменной:  $t = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ , при этом  $t \geq 0$ . Возведем данное выражение в квадрат (это можно сделать, поскольку обе части неотрицательны). Тогда:

$$t^2 = x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-2\sqrt{x-1})(x+2\sqrt{x-1})} + x + 2\sqrt{x-1} =$$

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 2(x + |x-2|).$$

Поскольку  $x \in [1; 2]$ , значит  $x - 2 \leq 0$  и  $|x - 2| = 2 - x$ , тогда  $t^2 = 2(x + 2 - x) = 4$ , откуда  $t = \pm 2$ . С учетом условия  $t \geq 0$ , имеем  $t = 2$ .

Ответ: 2.

Критерии:

Первый способ:

- Верно выделены полные квадраты – 2 б.
- Верно произведены преобразования и получено выражение с модулями – 1 б.
- Верно произведена оценка выражений под модулем – по 1 б. за каждое выражение;
- Верно произведено раскрытие модулей (без обоснования или с неполным обоснованием) – 1 б.

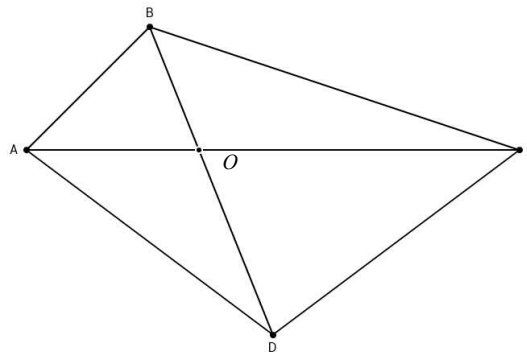
Второй способ:

- Решение в целом верное, но не произведен отбор отрицательного значения новой переменной – не более 3 б.
- Приведен верный ответ без решения или с неверным решением – 1 б.

### Задание 3. (8 б.)

Диагонали с длинами  $\sqrt{7}$  и 4 делят четырехугольник на части, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Найдите площадь четырехугольника, если угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен  $\pi / 6$ .

Решение: Обозначим  $S_{AOD} = S_1$ ,  $S_{AOB} = S_2$ ,  $S_{BOC} = S_3$ ,  $S_{COD} = S_4$ ,  $\angle AOB = \alpha$  (см рис.). По условию  $\angle ABD = \pi / 6$ .



Тогда  $S_1 S_3 = AO \cdot OD \cdot CO \sin^2 \alpha = S_2 S_4$ . Так как площади треугольников образуют арифметическую прогрессию, то можно положить  $S_1 = S - d$ ,  $S_2 = S$ ,  $S_3 = S + d$ ,  $S_4 = S + 2d$  и свойство прогрессии  $S_1 S_3 = S_2 S_4$  запишется в виде  $(S - d)(S + d) = S(S + 2d)$  или  $d(S + d) = 0$ . Поскольку  $S + d > 0$ , отсюда следует, что  $d = 0$  и площади всех треугольников равны между собой. В этом случае легко доказать, что диагонали четырехугольника



$ABCD$  делятся точкой пересечения пополам и, таким образом, этот четырехугольник является параллелограммом. Пусть  $\angle ABD = \varphi$ , тогда из треугольника  $ABO$  по теореме синусов имеем:

$$\frac{AO}{\sin \varphi} = \frac{BO}{\sin \frac{\pi}{6}}, \sin \varphi = \frac{AO \sin \frac{\pi}{6}}{BO} = \frac{AO}{2BO} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \angle AOB = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \sin \varphi \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha = \frac{1}{2} 4\sqrt{7} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ:  $3\sqrt{3}$ .

Критерии:

- Доказано, что диагонали делят четырехугольник на равновелики – 3 б.
- Доказано, что четырехугольник является параллелограммом – 2 б.
- Верно определена площадь четырехугольника – 3 б.

#### Задание 4. (10 б.)

Сколько соленой воды, имеющей массовую концентрацию соли  $q\%$ , надо добавить к 90 кг соленой воды, имеющей массовую концентрацию соли  $15\%$ , чтобы концентрация соли в получившемся растворе составила  $p\%$ . При этом соблюдаются следующие условия:  $p \neq q$ ,  $p \neq 0$ ; в 100 г пресной воды можно растворить не более 35 г соли. Найти, какие значения могут принимать  $p$  и  $q$ .

Решение: Пусть взято  $x$  кг  $q$ -процентного раствора соли. Тогда масса соли в нем составит  $\frac{x \cdot q}{100}$  кг. В 90 кг 15%-ного соляного раствора содержится

$\frac{90 \cdot 15}{100} = 13,5$  кг соли. Следовательно, после слияния растворов получится

раствор, содержащий  $\left(\frac{x \cdot q}{100} + 13,5\right)$  кг соли в  $(x+90)$  кг соленой воды. Так как процентная концентрация соли в новом растворе должна составить  $p\%$ , то получаем уравнение

$$\left(\frac{x \cdot q}{100} + 13,5\right) = \frac{(x+90) \cdot p}{100} \Leftrightarrow x = \frac{90(p-15)}{q-p},$$

так как по условию  $p \neq q$ . Из второго условия следует, что максимально

возможная концентрация соли составляет  $\frac{35}{135} 100\% = \frac{700}{27}\% \approx 30\%$ .

Следовательно, концентрации  $q$  и  $p$  не должны быть больше  $\frac{700}{27}\%$ . Кроме этого,  $p > 0$ ,  $q \geq 0$ . Поскольку  $x \geq 0$ , получаем неравенство  $\frac{90(p-15)}{q-p} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{p-15}{q-p} \geq 0$ . Таким образом, одновременно должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{p-15}{q-p} \geq 0, \\ 0 < p \leq \frac{700}{27}, \\ 0 < q \leq \frac{700}{27}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} p > 15, \\ q > p, \\ p \leq 700/27, \\ q \leq 700/27, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 < p \leq 700/27, \\ p < q \leq 700/27, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p < 15, \\ 0 \leq q < p. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p = 15, \\ q \leq 700/27. \end{cases}$$

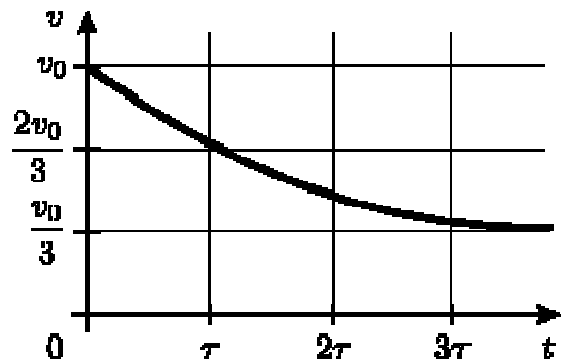
Ответ:  $\frac{90(p-15)}{q-p}$  с указанными выше условиями.

Критерии:

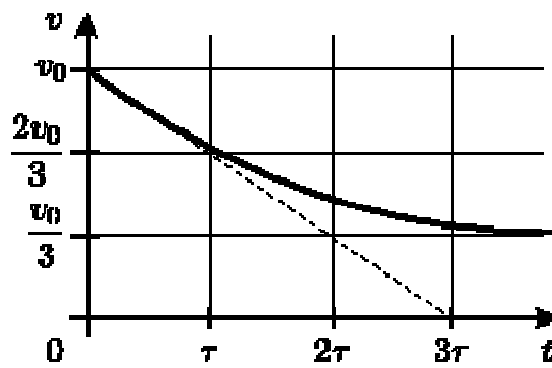
- Верно составлено уравнение для определения количества соленой воды – 2 б.
- Верно определено количество соленой воды – 2 б.
- Верно определены ограничения на концентрации – по 2 б. за каждый из случаев, итого 6 б.

#### Задание 5. (12 б.)

Космический корабль стартовал в вертикальном направлении с поверхности невращающегося сферически симметричного небесного тела, лишённого атмосферы. После выключения двигателя зависимость скорости корабля от времени имеет вид, показанный на рисунке. На каком расстоянии от центра небесного тела был выключен двигатель?



Решение: Найдём при помощи графика ускорение корабля в момент времени сразу после выключения двигателя. Для этого проведём касательную к графику в точке  $t = 0$  (см. рис.).



По определению величина ускорения равна модулю углового коэффициента

$$a_0 = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{v_0}{3\tau}$$

этой касательной:

Поскольку на корабль после выключения двигателя действует только

$$ma_0 = \frac{GmM}{R_0^2}$$

гравитационная сила со стороны небесного тела, то  $\frac{GmM}{R_0^2}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса корабля,  $M$  — масса небесного тела,  $R_0$  — искомое расстояние.

После удаления корабля на очень большое расстояние от небесного тела

$$v_1 = v_0/3$$

скорость корабля уменьшается до величины  $v_1 = v_0/3$  и становится постоянной.

Применяя закон сохранения механической энергии для корабля в гравитационном поле планеты, получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GmM}{R_0} = -ma_0 R_0.$$

Отсюда

$$R_0 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_0} = \frac{3\tau}{2v_0} (v_0^2 - v_1^2) = \frac{3\tau}{2v_0} \left( v_0^2 - \frac{v_0^2}{9} \right) = \frac{4}{3} \tau v_0.$$

Ответ:  $R_0 = \frac{4\tau v_0}{3}.$

Критерии:

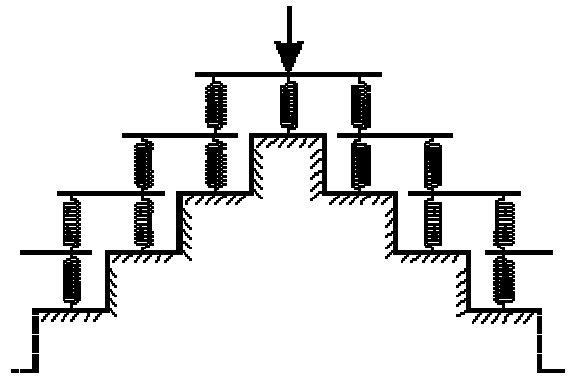
- Верно найдено ускорение через касательную – 4 б.
- Верно записан второй закон Ньютона – 2 б.
- Верно записан закон изменения полной механической энергии – 4 б.
- Верно получен численный ответ – 2 б.

#### Задание 6. (14 б.)

Найдите общий коэффициент жёсткости системы пружин, изображённой на рисунке, если внешняя сила прикладывается к верхней платформе в вертикальном направлении. Лестница, на которую опираются пружины, бесконечна. Все

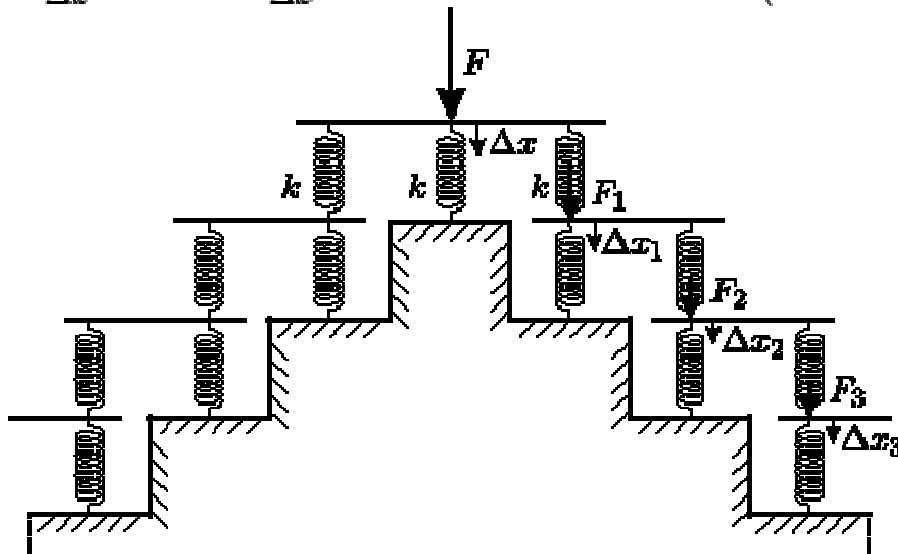
платформы при сжатии пружин сохраняют горизонтальное положение и не касаются ступенек лестницы. Каждая из платформ, кроме самой верхней, опирается на две пружины. Коэффициенты жёсткости всех пружин одинаковы

и равны  $k$ , оси всех пружин вертикальны. Массой пружин и платформ можно пренебречь.



Решение: Обозначим смещение верхней платформы под действием приложенной к ней силы  $F$  через  $\Delta x$ , а следующих, расположенных ниже платформ, под действием приложенных к ним сил  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , — через  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$  соответственно (см. рис.). Тогда из условия равновесия верхней платформы (сумма действующих на неё сил равна нулю) следует, что общий коэффициент жёсткости равен:

$$k_{\Sigma} = \frac{F}{\Delta x} = \frac{k\Delta x + 2k(\Delta x - \Delta x_1)}{\Delta x} = 3k - 2k \frac{\Delta x_1}{\Delta x} = k \left( 3 - 2 \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \right).$$



Из условий равновесия расположенных ниже платформ следует, что

$$\begin{aligned} F_1 &= k(\Delta x - \Delta x_1) = k\Delta x_1 + k(\Delta x_1 - \Delta x_2), \\ F_2 &= k(\Delta x_1 - \Delta x_2) = k\Delta x_2 + k(\Delta x_2 - \Delta x_3), \\ F_3 &= k(\Delta x_2 - \Delta x_3) = k\Delta x_3 + k(\Delta x_3 - \Delta x_4), \\ &\dots \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения и сокращая на  $k$ , получаем:

$$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \dots \quad (1)$$

Ясно, что общий коэффициент жёсткости правой или левой части данной бесконечной системы пружин не должен зависеть от номера ступени. Поэтому

$$\frac{F_1}{\Delta x_1} = \frac{F_2}{\Delta x_2} = \frac{F_3}{\Delta x_3} = \dots,$$

или

$$\frac{k(\Delta x - \Delta x_1)}{\Delta x_1} = \frac{k(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{\Delta x_2} = \frac{k(\Delta x_2 - \Delta x_3)}{\Delta x_3} = \dots$$

Отсюда

$$\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} = \dots \equiv n > 1,$$

поскольку деформации нижних пружин меньше, чем верхних. Таким образом,

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{n}; \quad \Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{n} = \frac{\Delta x}{n^2}; \quad \Delta x_3 = \frac{\Delta x_2}{n} = \frac{\Delta x}{n^3}; \quad \dots$$

Подставляя полученные выражения для  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_3$ , ... в формулу (1), получаем:

$$\Delta x = 2\frac{\Delta x}{n} + \frac{\Delta x}{n^2} + \frac{\Delta x}{n^3} + \frac{\Delta x}{n^4} + \dots$$

Отсюда, применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, имеем:

$$n = 1 + \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1},$$

$$n^2 - 3n + 1 = 0$$

или

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Решая это квадратное уравнение, находим:  $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Поскольку  $n > 1$ ,

$$n = \frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

то

. С учётом этого, окончательно получаем:

$$k_{\Sigma} = k \left(3 - 2\frac{\Delta x_1}{\Delta x}\right) = k \left(3 - 2 \cdot \frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right) = k \cdot \frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = k\sqrt{5}.$$

Ответ:  $k_{\Sigma} = k\sqrt{5}$ .

Критерии:

- Верно получено уравнение (1) – 4 б.
- Верно замечено, что коэффициент жёсткости не зависит от номера ступени – 1 б.
- Верно получено выражение для  $\Delta x$  – 4 б.
- Верно рассчитана сумма членов геометрической прогрессии – 3 б.
- Верно получен итоговый ответ – 2 б.

### Задание 7. (14 б.)

Среди изолированной группы людей численностью  $N=1500$  человек распространяется эпидемия простуды. В любой момент времени всех участников группы можно поделить на инфицированных  $I(t)$  и здоровых  $H(t)$ . При этом количество инфицированных увеличивается пропорционально числу инфицированных и числу здоровых людей в данный момент времени с коэффициентом передачи болезни  $\alpha=0,005$ , и уменьшается пропорционально числу инфицированных с коэффициентом излечения  $\beta=0,1$ . Уже излечившийся

человек может заразиться простудой повторно. На момент начала эпидемии в данной группе было  $I_0=200$  инфицированных. Составьте уравнения, описывающие изменение численности групп во времени. Считая, что подсчет числа инфицированных происходит один раз в день, найдите численность каждой из групп к концу третьего дня после начала эпидемии (при получении дробных значений для численности групп используйте округление). Сделайте выводы о динамике эпидемии.

Решение и ответ:

Численность инфицированных и здоровых участников группы в конце каждого дня определяется уравнением в приращениях:

$$\Delta I = (\alpha I(t)H(t) - \beta I(t))\Delta t, \quad (1)$$

и соотношением  $H(t) = N - I(t)$ . Подставив которое в предыдущее уравнение, получаем:

$$\Delta I = (\alpha I(t)(N - H(t)) - \beta I(t))\Delta t, \quad (2)$$

Учитывая, что  $\Delta t = 1$  день и  $\Delta I = I_i - I_{i-1}$ , получаем:

$$I_i = I_{i-1} + \alpha I_{i-1}(N - I_i) - \beta I_{i-1}, \quad (3)$$

где  $I_i$  и  $H_i$  - численность групп в конце  $i$ -го дня,  $i = 1..3$ .

Подставляя указанные значения, можно заполнить следующую таблицу:

| день  | 0    | 1    | 2    | 3    |
|-------|------|------|------|------|
| $I_i$ | 200  | 1480 | 1480 | 1480 |
| $H_i$ | 1300 | 20   | 20   | 20   |

В течении первого дня заболевают почти все члены группы и далее ситуация не меняется: число инфицированных и здоровых людей остается постоянным.

Критерии:

- Верно составлены уравнения (1) или (2) – 10 б.
- Верно составлено итерационное уравнение (3) без учета времени – 8 б.
- Ур. (1)-(3) составлены частично верно – до 8 б.
- Верно определено количество инфицированных и здоровых людей в конце каждого из дней – по 1 б. за день, итого 3 б.
- Верно сделаны выводы о динамике эпидемии – 1 б.

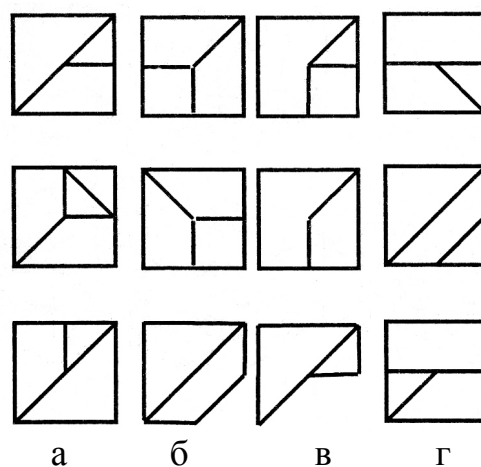
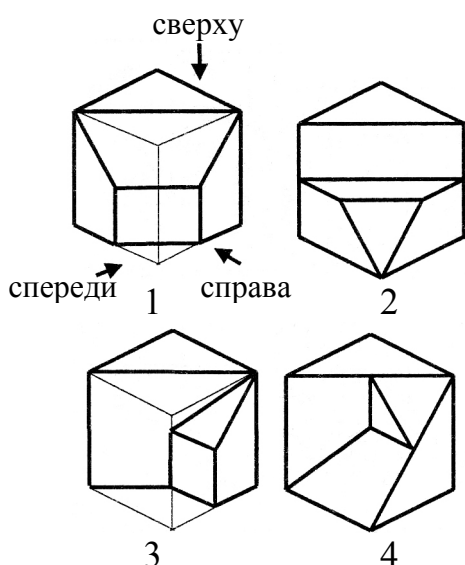
## Краевая олимпиада

### «Математика в решении мультидисциплинарных задач»

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2013 г. Очный тур. 11 класс

#### Задание 1. (4 б.)

На рис. 1-4 изображены многогранники, полученные отрезанием частей от куба. На рис. а-г приведены виды спереди, справа и сверху этих многогранников в произвольном порядке. Сопоставьте многогранник с его проекциями и укажите порядок (сверху вниз), в котором проекции представлены на рисунках. Например: 1 – а, сверху, справа, спереди.



Ответ:

1 – б справа, спереди, сверху;

2 – г спереди, сверху, справа;

3 – в спереди, справа, сверху;

4 – а сверху, спереди, справа.

Критерии: за каждый правильный ответ по одному баллу.

#### Задание 2. (6 б.)

Девушка вращает вокруг своей талии обруч хула-хуп. Обруч вращается без проскальзывания. Считая, что талия девушки имеет форму окружности, диаметр которой вдвое меньше диаметра хула-хупа, покажите, что после одного оборота обруча точка на нем, находившаяся первоначально в соприкосновении с талией девушки, проходит расстояние, равное периметру квадрата, описанного вокруг ее талии.

Решение: В системе отсчета, связанной с обручем, он будет неподвижен, а девушка будет перемещаться вдоль обруча. Поскольку длина окружности обруча в два раза больше, чем обхват талии, первоначальная точка соприкосновения талии и обруча движется вдоль диаметра обруча и пройдет вдоль него дважды. Если обозначить диаметр маленькой окружности за  $d$ , тогда периметр квадрата, описанного около этой окружности, равен  $4d$ . Диаметр

обруча в этом случае равен  $2d$ , а путь, пройденный точкой, равен  $4d$ , что и требовалось доказать.

Критерии:

- Верно указано, что точка соприкосновения движется вдоль диаметра обруча – 3 б.
- Верно найден путь, проделанный искомой точкой – 1 б.
- Приведено верное доказательство – 2 б.

### Задание 3. (8 б.)

Вычислите значение выражения:

$$\sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \dots}}}}$$

Решение: Обозначим искомое выражение

$$x = \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \dots}}}}, x \geq 0.$$

Возведем его в квадрат (это можно делать, поскольку выражение неотрицательно):

$$x^2 = \lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \sqrt{\lg 100 + \dots}}} = 2 + x.$$

Получившееся квадратное уравнение  $x^2 - x - 2 = 0$  имеет корни -1 и 2, но поскольку  $x \geq 0$ , то  $x = 2$ .

Ответ: 2.

Критерии:

- Верно составлено квадратное уравнение – 4 б.
- Верно найдены корни – по 1 б. за корень, итого – 2 б.
- Верно найдено значение искомого выражения – 2 б.
- Верный ответ получен без обоснования или с недостаточным обоснованием – 1 б.

### Задание 4. (12 б.)

На отрезке длиной  $l$ , соединяющем два точечных источника света, силы  $I_1$  и  $I_2$ , найдите наименее освещенную точку. Освещенность точки прямо пропорциональна силе источника света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до источника.

Решение: Пусть  $x$  - это расстояние от некоторой точки до первого источника. Тогда освещенность этой точки равна  $f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(l-x)^2}$ . Надо найти наименьшее значение этой функции при  $x \in [0; l]$ . Найдем производную:



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -2 \frac{I_1}{x^3} - 2 \frac{I_2}{(l-x)^3} (-1) = 2 \frac{I_2 x^3 - I_1 (l-x)^3}{x^3 (l-x)^3} = \\
 &= 2 \frac{(\sqrt[3]{I_2} x - \sqrt[3]{I_1} (l-x)) (\sqrt[3]{I_2^2} x^2 + \sqrt[3]{I_1 I_2} x (l-x) + \sqrt[3]{I_1^2} (l-x)^2)}{x^3 (l-x)^3} = \\
 &= 2 \frac{(x (\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}) - l \sqrt[3]{I_1}) (\sqrt[3]{I_2^2} x^2 + \sqrt[3]{I_1 I_2} x (l-x) + \sqrt[3]{I_1^2} (l-x)^2)}{x^3 (l-x)^3}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что вторая скобка в числителе неотрицательна при  $x \in [0; l]$ , тогда нулями числителя и знаменателя являются значения  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{l \sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$  и  $x_3 = l$ . При этом функция убывает на интервале  $(x_1; x_2)$  и возрастает на интервале  $(x_2; x_3)$ , значить точка  $x_2$  является точкой минимума функции.

Ответ: Расстояние от первого источника равно  $\frac{l \sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$ , т.е. точка делит отрезок в отношении  $\frac{\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_2}}$ .

Критерии:

- Верно составлена функция освещенности для произвольной точки отрезка – 2 б.
- Верно вычислена производная функции – 1 б.
- Верно определены критические точки – по 1 б за точки 1 и 3, 4 б. – за точку 2, итого 6 б.
- Проведено исследование функции на монотонность и доказано, что точка  $x_2$  является точкой минимума функции – 3 б.

#### Задание 5. (14 б.)

На рис. 1 приведена зависимость силы упругости  $f$ , возникающей при растяжении резинового стержня, от величины  $\Delta l$  его удлинения. Данный график можно приблизительно считать дугой окружности. Стержень очень медленно протягивают через щель, имеющую достаточно узкие закруглённые края-щёчки, как показано на рис. 2. Каждая из щёчек прижимается к стержню с постоянной силой  $F = 30$  Н. Коэффициент сухого трения между резиной и материалом щёчек  $\mu = 0,5$ , длина стержня в нерастянутом состоянии  $L = 10$  см. Какую работу совершат силы трения, действующие на стержень, к тому моменту, когда он весь будет протянут через щель?

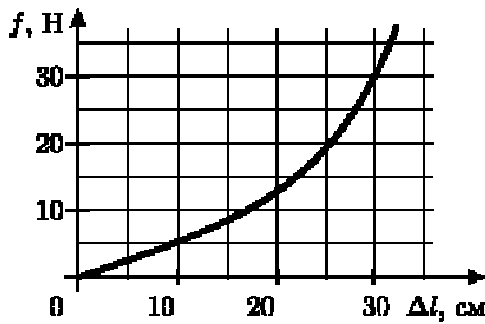


Рис. 1

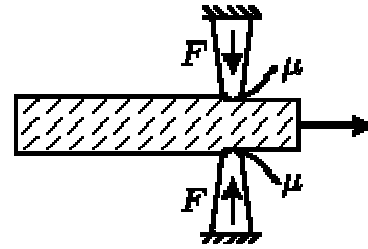


Рис. 2

Решение: Так как стержень протягивают через щель очень медленно, то сумма всех приложенных к нему сил всё время равна нулю. Значит, внешняя сила, прикладываемая к переднему концу стержня, всегда равна силе трения щёчек о стержень и постоянна по величине:

$$F = F = 2\mu F = 2 \cdot 0,5 \cdot 30 \text{ Н} = 30 \text{ Н}.$$

Передний конец стержня, к которому приложена внешняя сила, перемещается на расстояние  $L + \Delta l = 10 \text{ см} + 30 \text{ см} = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$ . Здесь  $\Delta l = 30 \text{ см}$  — изменение длины стержня к тому моменту, когда он протянут через щёчки практически целиком; оно соответствует приложенной к стержню растягивающей силе  $F = 30 \text{ Н}$  и определяется из графика зависимости силы упругости от удлинения.

Работа постоянной внешней силы над системой «стержень+щёчки» равна

$$A_{\text{вн}} = F(L + \Delta l) = 30 \text{ Н} \cdot 0,4 \text{ м} = 12 \text{ Дж}.$$

Эта работа расходуется, во-первых, на увеличение потенциальной энергии стержня  $\Delta U$  при его растяжении, и, во-вторых, на работу против сил трения, которая увеличивает внутреннюю энергию системы, то есть превращается в тепло  $Q$ . Таким образом,

$$A_{\text{вн}} = \Delta U + Q = \Delta U - A_{\text{тр}},$$

где работа сил трения  $A_{\text{тр}} < 0$ .

Изменение потенциальной энергии стержня, то есть величина энергии упругой деформации к концу всего процесса, может быть определено из приведённого в условии графика. Оно равно площади области под кривой, ограниченной зависимостью  $f(\Delta l)$ , осью абсцисс и вертикальной прямой, соответствующей  $\Delta l = 30 \text{ см}$ . Площадь области под кривой можно вычислить как разность площадей квадрата со стороной 30 и четверти окружности радиуса 30:

$$30: \quad S = 30^2 - \frac{\pi 30^2}{4} = 225(4 - \pi) \approx 193. \quad \text{Тогда} \quad \Delta U = 1,93 \text{ Дж.} \quad \text{Таким образом,}$$

получаем, что

$$A_{\text{тр}} = \Delta U - A_{\text{вн}} \approx 1,93 - 12 \approx -10,07 \text{ Дж}.$$

Как видно, эту величину нельзя было бы найти просто как произведение постоянной силы трения  $2\mu F$  на «длину пути», то есть, в данном случае, длину прошедшего через щёчки растянувшегося стержня — эта «длину пути» не соответствует ни начальной, ни конечной длине стержня. Такая ошибка в

использовании определения работы возникла из-за того, что контакт щёчек, даже сколь угодно узких, со стержнем, в данной задаче нельзя рассматривать как точечный – на протяжении этого контакта происходят существенные изменения характера движения точек стержня.

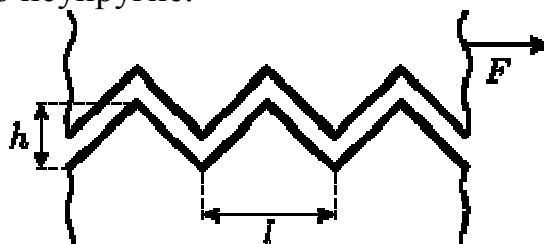
Ответ:  $A_{\text{тр}} \approx -10,07$  Дж.

Критерии:

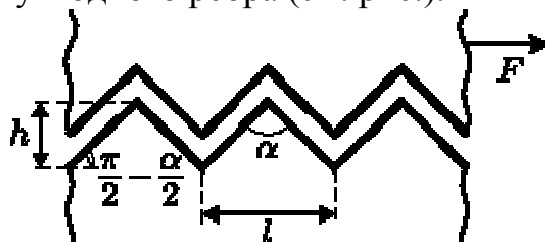
- Верно рассчитана сила трения – 2 б.
- Верно найдена работа внешней силы – 3 б.
- Верно записано первое начало термодинамики – 4 б.
- Верно найдена величина  $\Delta U$  (как площадь) – 4 б.
- Верно получен итоговый ответ – 1 б.

#### Задание 6. (14 б.)

Два тела имеют одинаковые ребристые поверхности, изображенные на рисунке. Какую среднюю силу в горизонтальном направлении, перпендикулярном рёбрам, нужно приложить к верхнему телу массой  $m$ , чтобы медленно тащить его по неподвижной горизонтальной поверхности второго тела с постоянной (в среднем) скоростью? Все рёбра одинаковые, симметричные, имеют ширину  $l$  и высоту  $h$ . Поверхности граней рёбер гладкие, их соударения абсолютно неупругие.



Решение: Рассмотрим сдвиг верхнего тела вдоль горизонтальной поверхности нижнего тела на ширину  $l$  одного ребра (см. рис.).



Пусть для того, чтобы сдвинуть тело на половину ширины ребра («приподнять» его), нам нужно приложить в горизонтальном направлении силу  $f$ . Так как по условию задачи верхнее тело движется с постоянной (в среднем) скоростью, то тангенциальная (параллельная поверхности ребра) компонента силы  $f$  должна уравнивать тангенциальную компоненту силы тяжести  $mg$ . Обозначив угол между образующими ребро гранями через  $\alpha$ , получаем:

$$f \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = mg \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \text{откуда} \quad f = mg \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Работа силы  $f$  на данном участке пути равна  $A = f \frac{l}{2}$ .

На второй половине пути, когда верхнее тело «скатывается под горку», для его смещения на вторую половину ширины ребра не нужно прикладывать никаких внешних сил – тело движется под действием силы тяжести, а запасённая на первом участке потенциальная энергия при соударении переходит в тепло. Следовательно, средняя сила, необходимая для перемещения тела на ширину  $l$  ребра, равна

$$F = \frac{A}{l} = \frac{f}{2} = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{mgh}{l}.$$

Заметим, что эффективный коэффициент трения равен

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{h}{l} = nh,$$

где  $n = 1/l$  – число рёбер на единицу длины поверхности.

Ответ:  $F = \frac{mgh}{l}.$

Критерии:

- Верно замечено, что тангенциальная компонента силы  $f$  должна уравновешивать тангенциальную компоненту силы тяжести  $mg$  – 4 б.
- Верно найдена работа силы  $f$  – 4 б.
- Верно определено, что для скатывания не нужно прикладывать силу, а энергия переходит в тепло – 3 б.
- Верно найдена средняя сила – 3 б.

#### Задание 7. (14 б.)

Среди изолированной группы людей численностью  $N=1500$  человек распространяется эпидемия простуды. В любой момент времени всех участников группы можно поделить на инфицированных  $I(t)$  и здоровых  $H(t)$ . При этом количество инфицированных увеличивается пропорционально числу инфицированных и числу здоровых людей в данный момент времени с коэффициентом передачи болезни  $\alpha=0,001$ , и уменьшается пропорционально числу инфицированных с коэффициентом излечения  $\beta=2$ . Уже излечившийся человек может заразиться простудой повторно. На момент начала эпидемии в данной группе было  $I_0=200$  инфицированных. Составьте уравнения, описывающие изменение численности групп во времени. Считая, что подсчет числа инфицированных происходит один раз в день, найдите численность каждой из групп к концу третьего дня после начала эпидемии (при получении дробных значений для численности групп используйте округление). Сделайте выводы о динамике эпидемии.

Решение и ответ:

Численность инфицированных и здоровых участников группы в конце каждого дня определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha I(t)H(t) - \beta I(t), \quad (1)$$

и соотношением  $H(t) = N - I(t)$ . Подставив которое в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha I(t)(N - I(t)) - \beta I(t). \quad (2)$$

Учитывая, что  $\frac{dI(t)}{dt} \approx \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}$  и что  $\Delta t = 1$  день, получаем:

$$\Delta I = (\alpha I(t)(N - I(t)) - \beta I(t)) \Delta t, \quad (3)$$

$$I_i = I_{i-1} + \alpha I_{i-1}(N - I_{i-1}) - \beta I_{i-1}, \quad (4)$$

где  $I_i$  и  $H_i$  - численность групп в конце  $i$ -го дня,  $i = 1..3$ .

Подставляя указанные значения, можно заполнить следующую таблицу:

| день  | 0    | 1    | 2    | 3    |
|-------|------|------|------|------|
| $I_i$ | 200  | 60   | 26   | 12   |
| $H_i$ | 1300 | 1440 | 1474 | 1488 |

Эпидемия постепенно сходит на убыль, количество инфицированных падает.

Критерии:

- Верно составлены дифференциальные уравнения (1) или (2) – 10 б.
- Верно составлено уравнение в приращениях (3) – 8 б.
- Верно составлено итерационное уравнение (4) без учета времени – 6 б.
- Ур. (1)-(4) составлены частично верно – до 8 б.
- Верно определено количество инфицированных и здоровых людей в конце каждого из дней – по 1 б. за день, итого 3 б.
- Верно сделаны выводы о динамике эпидемии – 1 б.