Задача 1

Условие

Сумма трёх положительных углов равна 90^o. Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

Решение

Пусть α, β, γ -- данные углы. Так как все они положительны, а сумма равна 90^o, все они меньше 90^o. Следовательно, $\cos\gamma = \cos(90^o - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < \cos\beta + \cos\alpha$, а значит $\cos\gamma \neq \cos\alpha + \cos\beta$.

Другое решение. Пусть α, β и γ -- углы, удовлетворяющие условию задачи, и $\cos\alpha+\cos\beta=\cos\gamma$. Это равносильно выполнению равенства: $\sin(90^o-\alpha)+\sin(90^o-\beta)=\sin(90^o-\gamma)$.

Заметим, что углы $(90^o-\alpha)$, $(90^o-\beta)$ и $(90^o-\gamma)$ также положительные (иначе какой-нибудь из углов α, β, γ должен быть не меньше 90^o, что противоречит условию), а их сумма равна 180^o. Следовательно, существует треугольник с такими углами. Умножим обе части полученного равенства на $2R$, где R -- радиус окружности, описанной около треугольника. Тогда для сторон треугольника выполняется равенство $a+b=c$, что невозможно.

Ответ

Нет.

Задача 2

Условие

Какие значения может принимать разность возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2,..., a_5, все члены которой принадлежат отрезку $[0; 3\pi/2]$, если числа $\cos a_1$, $\cos a_2$, $\cos a_3$, а также числа $\sin a_3$, $\sin a_4$ и $\sin a_5$ в некотором порядке тоже образуют арифметические прогрессии.

Решение

Для искомой разности δ возрастающей прогрессии

$\alpha_1,\ldots,\alpha_5 \in [0;3\pi/2]$

получаем $\delta \in (0;\pi/2)$ и $\cos\delta \neq 1$. Рассмотрим следующие два случая, один из которых непременно имеет место.

- $\alpha_3 \le \pi$, тогда $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \le \pi$ и $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cos\alpha_3$, откуда $2\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_3 = 2\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2} = 2\cos\alpha_2\cos\delta$, поэтому $\cos\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \pi/2$ (а значит, $\alpha_3 \ge \pi/2$, т.е. имеет место также и 2-й случай).
- $\alpha_3 \ge \pi/2$, тогда $\pi/2 \le \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 \le 3\pi/2$ и $\sin\alpha_3 > \sin\alpha_4 > \sin\alpha_5$, откуда $2\sin\alpha_4 = \sin\alpha_3 + \sin\alpha_5 = 2\sin\frac{\alpha_3+\alpha_5}{2}\cos\frac{\alpha_3-\alpha_5}{2} = 2\sin\alpha_4\cos\delta$, поэтому $\sin\alpha_4 = 0$ и $\alpha_4 = \pi$ (а значит, $\alpha_3 \le \pi$, т.е. имеет место также и 1-й случай).

Таким образом, оба случая имеют место, поэтому $\alpha_2 = \pi/2$ и $\alpha_4 = \pi$, откуда $\delta = \pi/4$.

Ответ

$\pi/4$.

Задача 3

Условие

Известно, что $tg\ \alpha + tg\ \beta = p$, $ctg\ \alpha + ctg\ \beta = q$. Найти $tg\ (\alpha + \beta)$.

Решение

Если $tg\ (\alpha+\beta)$ определен, то

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Произведение тангенсов связано с p и q следующим образом:

$$q = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (3)$$

Из (3) получаем, что p и q либо одновременно равны нулю, либо одновременно не равны.

1°. Если $p = 0$ и $q = 0$, то из (1) получаем $tg\,(\alpha+\beta) = 0$. При этом надо проверить, что знаменатель в (1) не равен нулю. Действительно:

$tg\,\alpha + tg\,\beta = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -\,tg\,\beta \Rightarrow 1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = 1 + tg^2\alpha > 0.$

2°. Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p \neq q$, то из (2) получаем $tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = \frac{p}{q}$ и из (1) $tg\,(\alpha+\beta) = \frac{pq}{q-p}$.

3°. Если $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p = q$, то $tg\,(\alpha+\beta)$ не определен.

4°. Если $p = 0$ или $q = 0$, но $p \neq q$, то условие задачи противоречиво.

Задача 4

Условие

Сколько корней имеет уравнение

$\sin x = \frac{x}{100}$?

Решение

Ответ: 63. Прежде всего отметим, что число положительных корней равно числу отрицательных корней, а ещё есть корень 0. Поэтому достаточно убедиться, что число положительных корней равно 31. Если $\sin x = \frac{x}{100}$, то $|x| = 100|\sin x| \leq 100$. Рассмотрим графики функций $y = x/100$ и $y = \sin x$. Участок оси Ox от 0 до 100 содержит 15 отрезков длиной 2π и один отрезок длиной меньше 2π. Рассматривая указанные графики, легко убедиться, что на первом отрезке длиной 2π есть один корень данного уравнения, а на каждом из остальных 14 отрезков длиной 2π есть два корня. Вычисления показывают, что длина последнего отрезка больше π, поэтому на нём тоже есть два корня. Всего получаем 31 положительный корень.

Задача 5

Условие

Найдите соотношение между

arcsin cos arcsin x и arccos sin arccos x.

Решение

Ответ: arcsin cos arcsin x + arccos sin arccos x = $\frac{\pi}{2}$. Пусть arcsin cos arcsin $x = \alpha$ и arccos sin arccos $x = \beta$. Тогда $0 \le \alpha, \beta \le \pi/2$. Действительно, $0 \le \cos \arcsin x \le 1$, поскольку $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, и $0 \le \sin \arccos x \le 1$, поскольку $0 \le \arccos x \le \pi$. Далее, $\sin\alpha = \cos \arcsin x$, поэтому $\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos \alpha$; $\cos \beta = \sin \arccos x$, поэтому $\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta$ и $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm\sin \beta$. Из того, что $\cos \alpha = \sin \beta$ $(= \pm x)$, следует, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Задача 6

Условие

Докажите, что сумма

$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Решение

Предположим, что сумма

$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x$

принимает только положительные значения при всех x. Заменив x на $x + \pi$, получим, что выражение

$\cos 32x - a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x - ... + a_2\cos 2x - a_1\cos x$

принимает положительные значения при всех x. Сложив эти выражения, получим, что сумма

$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + ... + a_4\cos 4x + a_2\cos 2x$

принимает положительные значения при всех x. Затем повторим те же самые рассуждения, последовательно заменяя x на $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \frac{\pi}{4}$, $x + \frac{\pi}{8}$, $x + \frac{\pi}{16}$. В результате получим, что $\cos 32x$принимает положительные значения при всех x. Но при $x = \pi/32$ выражение $\cos 32x$ принимает значение -1. Получено противоречие.

Задача 7

Условие

На доске после занятия осталась запись: "Вычислить $t(0) - t(\frac{\pi}{5}) + t(\frac{2\pi}{5}) - t(\frac{3\pi}{5}) + ... + t(\frac{8\pi}{5}) - t(\frac{9\pi}{5})$, где $t(x) = \cos 5x + *\cos 4x + *\cos 3x + *\cos 2x + *\cos x + *$" . Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи *). Не ошибается ли он?

Решение

Ответ: нет, не ошибается; сумма равна 10.
Пусть $t_5(x) = \cos 5x$ и $t_k(x) = *\cos kx$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Если рассмотреть аналогичную сумму для t_5 вместо t, то в результате получим 10. Остаётся проверить, что для всех остальных t_k суммы равны 0. Для $k = 0$ это очевидно. А для $k = 1, 2, 3, 4$ приходим к одному и тому же равенству

$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{5\pi}{5} + \cos\frac{7\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{5}$.

Выражение как в правой части, так и в левой части равно 0. Это следует из того, что сумма векторов, идущих из центра правильного пятиугольника в его вершины, равна 0, поскольку при повороте на 2π/5 эта сумма должна перейти сама в себя. Рассматривая проекции указанных векторов на подходящие прямые, легко получить требуемые равенства.

Задача 8

Условие

Существует ли плоский четырехугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

Решение

Это четырёхугольник, у которого три угла равны 45°, а четвёртый - 225° (тогда тангенсы всех его углов равны 1).

Ответ

Да, существует.

Задача 9

Условие

Числа *a* и *b* таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

Решение

По условию функция $y = \sin x + a - b x$ обращается в нуль ровно в двух точках x_1 и x_2, $x_1 < x_2$.
Эти точки разбивают числовую ось на 3 промежутка $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, $(x_2, +\infty)$. Поскольку $b \neq 0$, а $|\sin x| \leq 1$, то на промежутках $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ функция имеет разные знаки. Поэтому на некоторых двух соседних промежутках $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) или (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$ функция имеет одинаковые знаки, а тогда либо точка x_1, либо точка x_2 является точкой экстремума и производная в ней $y'' = (\sin x + a - b x)'' =$
$= \cos x - b$ обращается в нуль.