Задача 1

Условие

Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?

Решение

Мы будем говорить, что ладья движется *вдоль* горизонтали (или вертикали), если при своём ходе она перемещается с одного поля этой горизонтали (вертикали) на другое. Допустим, что ладья совершила обход шахматной доски, побывав при этом на каждом поле по одному разу. Покажем, что при обходе доски ладья должна либо хотя бы один раз двигаться вдоль *каждой* вертикали, либо хотя бы один раз двигаться вдоль *каждой* горизонтали. Действительно, пусть найдётся вертикаль, вдоль которой ладья ни разу не двигалась. Это значит, что каждое поле этой вертикали (на всех этих полях ладья, по условию, побывала) ладья проходила, двигаясь `` поперёк"" вертикали, т. е. *вдоль* соответствующей горизонтали. Следовательно, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой горизонтали. Пусть, для определённости, ладья двигалась хотя бы один раз вдоль каждой вертикали. На каждую вертикаль (кроме, быть может, той, с которой начинается обход, и той, на которой обход заканчивается) ладья должна войти и после движения вдоль вертикали — выйти с неё. При этом вход и выход осуществляются обязательно с поворотами. Таким образом, общее число поворотов не меньше, чем

$$6 \cdot 2 + 1 + 1 = 14$$

(6 вертикалей со "входом" и "выходом", начальная вертикаль только с "выходом", конечная — только со "входом").
Итак, меньше 14 поворотов сделать нельзя. В то же время, обходы, содержащие ровно 14 поворотов, существуют.

Задача 2

Условие

Как надо расположить числа 1, 2, ...,1962 в последовательности $a_1, a_2, ..., a_{1962}$, чтобы сумма

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_{1961} - a_{1962}| + |a_{1962} - a_1|$$

была наибольшей?

Решение

Отметим на числовой прямой точки 1, 2,..., 1962. Каждому расположению чисел в последовательности a_i можно поставить в соответствие замкнутую ломаную с вершинами x_i, обходящую их по разу. И наоборот, каждой такой ломаной соответствует последовательность a_i. Тогда в задаче требуется найти ломаную с максимальной длиной. Длина каждой такой ломаной равна сумме длин отрезков между соседними точками с учётом кратности его покрытия звеньями. Докажем, что отрезок $[s, s + 1]$ может быть покрыт не более, чем $2 \min(s, 1962 - s)$ раз. Отрезок $[s, s + 1]$ может покрываться только звеньями, один конец каждого из которых лежит в множестве $\{1,..., s\}$, а другой — в множестве $\{s + 1,..., 1962\}$. Причём каждой вершине любого из этих множеств отвечает не более двух звеньев, а значит, покрывать отрезок $[s, s + 1]$ может не более $2 \min(s, 1962 - s)$ звеньев. Осталось построить ломаную, достигающую полученного максимума. Несложно проверить, что ломаная, соответствующая последовательности 881, 881 + 1, 881 - 1, 881 + 2, 881 - 2,..., $881 + i$, $881 - i$,..., 881 + 881, является искомой.

Задача 3

Условие

Даны действительные числа $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ такие, что

$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$,
$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3$

$+ b_1b_3$.

Докажите, что если $a_1 \leq b_1$, то $a_3 \leq b_3$.

Решение

Данные задачи напоминают теорему Виета. Рассмотрим многочлены $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ и $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$. Из условия задачи следует, что эти многочлены отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом по оси ординат.

При $x \le b_1$ имеем $Q(x) \le 0$. Действительно, каждый из трех множителей в выражении для $Q(x)$ неположителен, а произведение трех неположительных чисел неположительно.

Итак, $Q(a_1) \le 0$, $P(a_1) = 0$. Значит, график $y = Q(x)$ получается из графика $y = P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3) \le P(a_3) = 0$. Но при $x > b_3$ имеем $Q(x) > 0$. Следовательно, $a_3 \le b_3$.

Задача 4

Условие

Докажите, что первые цифры чисел вида 2^{2n} образуют непериодическую последовательность.

Решение

Рассмотрим окружность длины 1 как отрезок [0;1] с отождествленными концами. Тогда дробную часть f числа k*lg2 можно рассматривать как точку этой окружности. Первая цифра числа 2^kуправляется положением f относительно точек деления 0, lg 2, ..., lg 9. (Например, если 2^k начинается с 7, то $7*10^s<2^k<8*10^s$ для натурального s. Дробная часть числа k*lg 2 равна k*lg 2 - s, и она находится между lg 7 и lg 8.)

Предположим, что первые цифры чисел 2^{2n} повторяются с периодом k. Тогда при любом n дробные части чисел 2^n*lg 2 и 2^{n+k}*lg 2 попадают в один и тот же интервал окружности; длина любого из этих интервалов не превосходит lg 2 < 1/3.

Пусть на окружности отложены дробные части двух положительных чисел A и B; эти дробные части различны и не являются диаметрально удаленными точками окружности; длина меньшей из двух дуг, на которые эти точки делят окружность, равна x. Тогда, как легко показать непосредственно, длина одной из дуг, соединяющих дробные части чисел 2A и 2B, равна 2x. Пусть теперь дробные части чисел A и B лежат в одном интервале; рассмотрим пары 2A и 2B, 4A и 4B и т. д. Из сказанного выше следует, что на некотором шаге одна из дуг, соединяющих дробные части пары, станет больше 1/3, но меньше 2/3. Значит, эти дробные части принадлежат разным интервалам окружности. Применяя эти рассуждения к числам A=2^{n_0}*lg 2 и B= 2^{n_0+k}*lg 2, где n_0 - некоторое фиксированное натуральное число, получаем противоречие с предположением о периодичности.

Задача 5

Условие

Докажите, что числа вида 2^n при различных целых положительных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

Решение

Пусть A — данное натуральное число. Покажем, что натуральное число n можно выбрать так, что $10^m A < 2^n < 10^m(A + 1)$, т.е. $m + \lg A < n \lg 2 < m + \lg(A + 1)$. Эквивалентное условие таково: существуют натуральные числа m и n, для которых $\lg A < n \lg 2 - m < \lg(A + 1)$. Число $\lg 2$ иррационально. (Действительно, предположим, что $\lg 2 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $10^{p/q} = 2$, т.е. $10^p = 2^q$. Этого не может быть.) Поэтому остаётся доказать следующее утверждение: `` Пусть α — иррациональное число. Тогда для любых чисел $a < b$ можно выбрать целые числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$."" Пусть $\Delta = b - a$. Для каждого целого числа m можно выбрать целое число n так, что $0 \le m\alpha - n \le 1$. Разделим отрезок [0, 1] на равные отрезки, длина каждого из которых меньше Δ. Пусть количество этих отрезков равно k. Тогда среди чисел $\alpha - n_1$, $2\alpha - n_2$, ..., $(k + 1)\alpha - n_{k+1}$ есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Вычтем из большего числа меньшее: $p\alpha - n_p - (q\alpha - n_q) = t$. Ясно, что $0 \le t < \Delta$. Более того, $t \neq 0$, поскольку иначе $\alpha = \frac{n_p - n_q}{p - q}$ — рациональное число. Рассмотрим числа вида Nt, где N — целое число. Каждое из этих чисел имеет вид $m\alpha - n$. А из того, что $0 < t < \Delta$, следует, что хотя бы одно из этих чисел расположено строго между a и b.

Задача 6

Условие

Решить в положительных числах систему:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^y & = & z, \\ y^z & = & x, \\ z^x & = & y. \end{array}\right.$$

Решение

Заметим сначала, что если одна из неизвестных равна единице, то остальные тоже равны единице. Действительно, пусть $x = 1$. Тогда $z = 1^y = 1$, $y = z^x = 1^1 = 1$. Предположим, что существует ещё какое-нибудь решение кроме (1, 1, 1). Пусть сначала $x > 1$. Тогда $z = x^y > 1$, $y = z^x > 1$. Следовательно, $z = x^y > x^1 = x$, $y = z^x > z^1 = z$, $x = y^z > y^1 = y$, что невозможно. Значит, этот случай невозможен. Случай $x < 1$ получается из случая $x > 1$ заменой всех знаков ``> "" на знаки ``<"".

Ответ

$x = y = z = 1$.

Задача 7

Условие

Не используя калькуляторов, таблиц и т.п., докажите неравенство

$\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}$.

Решение

Прежде всего заметим, что $0 < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}$. Далее, $3^7 < 7^4$, поэтому $7 < 4 \log_3 7$, а значит, $\frac{7}{8} < \log_3 \sqrt{7}$.

Задача 8

Условие

Решите уравнение $x^{x^4} = 4$ ($x > 0$).

Решение

Ответ: $x = \sqrt{2}$.

Очевидно, что $x = \sqrt{2}$ — решение уравнения. Функция $y = x^{x^4}$ монотонно возрастает на $[1; +\infty)$, поэтому на этом промежутке других решений нет. На интервале (0;1) решений тоже нет, так как на нём значения функции меньше 1. Итак, $x = \sqrt{2}$ — единственное решение.

Задача 9

Условие

Докажите для каждого натурального числа n>1 равенство: $[n^{1/2}]+ [n^{1/3}]+ ...+ [n^{1/n}] = [\log_2 n]+ [\log_3 n]+ ...+ [\log_n n]$ (Через [x] обозначена целая часть числа x.)

Решение

Заметим, что целая часть числа $a \geq 1$ равна количеству натуральных чисел, меньших или равных a. В частности, $[\sqrt[k]{n}] - 1$ есть число натуральных $y \geq 2$, таких что $y \leq \sqrt[k]{n}$, т. е. $y^k \leq n$. Следовательно, сумма $([\sqrt{n}] - 1) + ([\sqrt[3]{n}] - 1) + ...+ [\sqrt[n]{n} - 1]$ равна количеству N всех пар (k, y) натуральных чисел, больших 1, удовлетворяющих неравенству $y^k \leq n$ (при $k > n$ это неравенство решений не имеет, так как $2^n \geq n$). Аналогично рассматривается правая часть: $[\log_y n] - 1$ — это число натуральных $k \geq 2$, таких что $k \leq \log_y n$, т. е. $y^k \leq n$. Поэтому

$([\log_2 n] - 1) + ([\log_3 n] - 1) + ...+ [\log_n n] - 1 = N$

(при $y > n$, $k \geq 2$ неравенство $y^k \leq n$, очевидно, не выполняется). Итак, обе части нашего равенства равны $N + n - 1$.

Задача 10

Условие

Числа 2^{1989} и 5^{1989} выписали одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?

Решение

Поскольку в числе n ровно $[\lg n] + 1$ цифр, всего выписано $[\lg 2^{1989}] + [\lg 5^{1989}] + 2$ цифр. Заметим, что $\lg 2^{1989} + \lg 5^{1989} = \lg 10^{1989} = 1989$ — целое число, а значит, $[\lg 2^{1989}] + [\lg 5^{1989}] = 1988$, ведь при взятии целой части x из x вычитается $0 \leq \{x\} < 1$, и при переходе от $\lg 2^{1989} + \lg 5^{1989}$ к $[\lg 2^{1989}] + [\lg 5^{1989}]$ вычитается меньше чем 2, т. е. 1. Итак, всего выписано 1990 цифр.

Ответ

1990 цифр.

Задача 11

Условие

Функция f(x) на отрезке [a,b] равна максимуму из нескольких функций вида $y=C*10^{-|x-d|}$ (с различными d и C, причём все C положительны). Дано, что f(a) = f(b). Докажите, что сумма длин участков, на которых функция возрастает, равна сумме длин участков, на которых функция убывает.

Решение

Пусть $f_i(x) = c_i \cdot 2^{-|x-d_i|}$, $f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x)$. Разобьём отрезок $[a, b]$ на несколько отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_M, b_M]$, $a = a_1$, $b = b_M$, $b_k = a_k + 1$, таких что на каждом из них функция $f(x)$ совпадает с одной из исходных функций f_i: $f(x) = f_{ik}(x)$ на отрезке $[a_k, b_k]$, причём $i_k \neq i_k + 1$, т. е. на стыке двух отрезков $f(x)$ перескакивает с одной из исходных функций на другую. Рассмотрим множество L, состоящее из прямых, параллельных оси абсцисс, проходящих через локальные экстремумы функции $f(x)$, а также через точки $(a_k, f(a_k))$, $k = 1, ..., M$. Рассмотрим полосу между двумя соседними прямыми из L: $y = y_1$ и $y = y_2$, где $y_1 < y_2$. В эту полосу попадают несколько частей графика функции $f(x)$ при $x \in [\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], ..., [\alpha_n, \beta_n]$, мы считаем, что все точки из интервала (α_l, β_l) лежат внутри полосы, а точки $(\alpha_l, f(\alpha_l))$ и $(\beta_l, f(\beta_l))$ — на границе. Тогда внутри каждого из отрезков $[\alpha_l, \beta_l]$ функция $f(x)$ не меняет характера монотонности (либо только возрастает, либо только убывает) и не перескакивает с одной исходной функции на другую, так как все точки, где это может произойти, лежат на одной из прямых множества L и не могут попасть внутрь рассматриваемой полосы. Т. к. $f(x)$ непрерывна, участки графика функции, заключённые в этой полосе, попеременно возрастают и убывают. Поскольку $f(a) = f(b)$, то n — чётно. Задача будет решена, если мы докажем, что все отрезки $[\alpha_l, \beta_l]$ имеют одинаковую длину. Пусть $[\alpha, \beta]$ — один из отрезков $[\alpha_l, \beta_l]$, такой что $f(x) = c \cdot 2^{-|x-d|}$ на этом отрезке. Если на этом отрезке f возрастает, то $\alpha < \beta \leq d$ и $y_1 = f(\alpha) = c \cdot 2^{\alpha - d}$, $y_2 = f(\beta) = c \cdot 2^{\beta - d}$. Тогда

$$\beta - \alpha = (\beta - d) - (\alpha - d) = \log_2\left(\frac{y_2}{c}\right) - \log_2\left(\frac{y_1}{c}\right) = \log_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Аналогично доказывается, что $\beta - \alpha = \log_2 (y_2 / y_1)$, когда f убывает. Итак, мы доказали, что все отрезки $[\alpha_l, \beta_l]$ имеют одинаковую длину, что и требовалось.

Задача 13

Условие

Решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z = a, \\ x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ x^3+y^3+z^3 = a^3. \end{cases}$$

Решение

Ответ: $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Тождество $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + xz)$ показывает, что

$xy + yz + xz = 0.(()1)$

Тождество $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$ показывает, что $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$. Учитывая равенство (1), получаем $3xyz = 0$. Если $x = 0$, то равенство (1) показывает, что $yz = 0$. Поэтому либо $y = 0$ и $z = a$, либо $z = 0$ и $y = a$. Аналогично разбираются остальные варианты. В итоге получаем следующие решения: $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$ и $(a, 0, 0)$.

Задача 13

Условие

Решите в натуральных числах уравнение $(1+n^k)^l=1+n^m$, где $l>1$.

Решение

Единственное решение уравнения: $n=2$, $k=1$, $l=2$, $m=3$. Докажем это.

Пусть p – простой множитель l. Поскольку $n^m=(1+n^k)^l-1$, то n^m делится на $(1+n^k)^p-1$. Но это выражение равно $n^k\cdot p+n^{2k}\cdot p(p-1)/2+n^{3k}\cdot r$, где r – неотрицательное целое число. Разделив на n^k, получим $p+n^k\cdot p(p-1)/2+n^{2k}\cdot r$. Если n не делится на p, то это выражение взаимно просто с n, и n^m не может на него делиться. Значит, p – делитель n. Тогда $1+n^k\cdot(p-1)/2+(n^{2k}/p)\cdot r$ – натуральное число, большее единицы. Если $k>1$ или p нечетно, то второе слагаемое делится на n (третье делится всегда), сумма взаимно проста с n, и n^m не может на нее делиться. Следовательно, $k=1$ и l имеет вид 2^s.

Вспомним теперь, что $n^m=(1+n^k)^l-1=(1+n)^l-1=ln+\ \dots$ В правой части все члены, начиная со второго, делятся на n^2 . Из этого, поскольку $m>1$, следует, что l делится на n. Значит, n, как и l, является степенью двойки. Но $(1+n)^l-1=[(1+n)^{l/2}+1]\cdot[(1+n)^{l/2}-1]=$ $=[(1+n)^{l/2}+1]\ \dots\ (n+2)n,\}$ откуда $n+2$ также является степенью двойки. Следовательно, $n=2$. Множитель разложения, предшествующий $n+2=4$, равнялся бы $3^2+1=10$ и не был бы степенью двойки. Значит, $l=2$, откуда $m=3$.

Задача 14

Условие

Решите уравнение

$(x+1)^{63}+(x+1)^{62}(x-1)+(x+1)^{61}(x-1)^2+...+(x-1)^{63}=0.$

Решение

Ответ: x=0. Умножим обе части уравнения на (x+1)-(x-1)=2. Тогда оно преобразуется к виду

$(x+1)^{64}-(x-1)^{64}=0$

и легко решается:

$(x+1)^{64}=(x-1)^{64}$,
$|x+1|=|x-1|$,

поскольку x+1 не равно x-1, получаем x+1=-(x-1), откуда x=0.

Задача 15

Условие

Пусть $f(x)=x^2+12x+30$. Решите уравнение

f(f(f(f(f(x)))))=0.

Решение

Заметим, что

$f(x)=(x+6)^2-6.$

Отсюда видно, что

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32}-6$.

Осталось выписать ответ: $x = -6 \pm 6^{1/32}$.

Задача 16

Условие

Натуральное число n таково, что $3n+1$ и $10n+1$ являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число $29n+11$ — составное.

Решение

Пусть $3n + 1 = a^2$, $10n + 1 = b^2$, где $a, b \in N$, и пусть $29n + 11$ равно простому числу p. Далее можно рассуждать разными способами.

Первый способ. Перемножим указанные равенства, в результате получим $30n^2 + 13n + 1 = (ab)^2$. Вычитая из этого равенства верное равенство $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, получим: $29n^2 + 11n = (ab)^2 - (n + 1)^2$. Отсюда $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$. Хотя бы один из множителей в правой части делится на p и потому не меньше p. Во всяком случае $ab + n + 1 \geq p$, откуда $ab \geq 28n + 10$. Возведем это неравенство в квадрат: $(ab)^2 \geq 784n^2 + 560n + 100$. С другой стороны, $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$, что противоречит предыдущему. Утверждение доказано.

Второй способ. Найдём такие вещественные числа x и y, что выполнено равенство $x(3n + 1) + y(10n + 1) = 29n + 11$ для любого n. Из системы линейных уравнений $3x + 10y = 29$, $x + y = 11$ получаем: $x = \frac{81}{7}$, $y = -\frac{4}{7}$. Таким образом, $\frac{81a^2-4b^2}{7} = 29n + 11$, или $(9a + 2b)(9a - 2b) = 7p$. Заведомо $9a + 2b > 7$, откуда $9a + 2b \geq p > 29n$. Так как $9a - 2b > 0$, то $18a > 9a + 2b > 29n$, откуда $a > n$, $3n + 1 = a^2 > n^2$, $n < 3$. Непосредственно проверяется, что значения $n = 1, 2$ не подходят.

Задача 17

Условие

На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А две большие и одна маленькая сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одна большая и две маленьких сегодня, или пять маленьких вчера.

Решение

Обозначим "рыбные цены": сегодня большая рыба стоит b_c, а маленькая m_c. Вчера большая стоила b_v, а маленькая — m_v. Тогда из условий задачи имеем два уравнения
$3b_c + m_c = 5b_v$, $2b_c + m_c = 3b_v + m_v$.
Отсюда получаем:
$5m_v = (2b_c + m_c – 3b_v)5 = 10b_c + 5m_c – 3(3b_c + m_c) = b_c + 2m_c$.
То есть пять маленьких вчера стоили столько же, сколько одна большая и две маленькие сегодня.

Задача 18

Условие

Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при этом, если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться числа: 27, 27, 39, 87.

Решение

Пусть $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ — искомая арифметическая прогрессия, b, bq, bq^2, bq^3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

$$a+b=27,$$
$$a+d+bq=27,$$
$$a+2d+bq^2 = 39,$$
$$a + 3d + bq^3 = 87.$$

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

$$d+b(q-1)=0,$$
$$d+bq(q-1)=12,$$
$$d+bq^2(q-1) = 48.$$

Из первого уравнения получаем $b(q - 1) = - d$; подставим это выражение во второе и третье уравнения:

$d - dq = 12,$
$d - dq^2 = 48.$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим $q = 3$. Следовательно, $d = -6$, $b = 3$ и $a = 24$. Таким образом, искомые прогрессии — это

$$24,\ 18,\ 12,\ 6;$$

$$3,\ \ 9,\ \ 27,\ 81.$$

Задача 19

Условие

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 & = & 2a^2, \\ x + y + 2z & = & 4(a^2 + 1), \\ z^2 - xy & = & a^2. \end{cases}$$

Решение

Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 2z^2 + 2a^2, \\ x + y & = & 4(a^2 + 1) - 2z, \\ -xy & = & a^2 - z^2. \end{cases}$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим:

$0 = 16(a^2 + 1)^2 - 16(a^2 + 1)z,$

т.е. $z = a^2 + 1$. Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x + y & = & 2(a^2 + 1), \\ xy & = & a^4 + a^2 + 1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$x = a^2 \pm a + 1, \quad y = a^2 \mp a + 1.$

Задача 20

Условие

Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y = 2, \\ xy - z^2 = 1? \end{cases}$$

Решение

Из второго уравнения следует, что $xy \geq 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны и $x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$, причём равенство $x + y = 2$ возможно лишь в том случае, когда $x = y = 1$. В таком случае $z = 0$.

Ответ

Одно решение.

Задача 21

Условие

a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство $((a^2+2bc)/(b^2+c^2))+ ((b^2+2ac)/(c^2+a^2))+ ((c^2+2ab)/(a^2+b^2))>3$.

Решение

Ввиду неравенства треугольника $a^2 > (b-c)^2$. Отсюда $a^2+2bc > b^2 + c^2$. Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других. Поэтому их сумма больше 3.

Задача 22

Условие

Сравнив дроби 111110/111111, 222221/222223, 333331/333334, расположите их в порядке возрастания.

Решение

Рассмотрим числа
$1-x=1/111111$,
$1-y=2/222223$,
$1-z=3/333334$,
а также обратные к ним
$1/(1-x)=111111$,
$1/(1-y)=111111+1/2$,
$1/(1-z)=111111+1/3$.
Мы видим, что $1/(1-x) < 1/(1-z) < 1/(1-y)$. Поскольку все рассматриваемые числа положительны, $1-x > 1-z > 1-y$. Следовательно, $x<z<y$.

Задача 23

Условие

Про положительные числа a, b, c известно, что $(1/a)+(1/b)+(1/c)\geq a+b+c$. Докажите, что $a+b+c\geq 3abc$.

Решение

Умножая неравенство $(1/a)+(1/b)+(1/c)\geq a+b+c$ на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство $bc+ac+ab\geq(a+b+c)abc$.

Теперь докажем вспомогательное неравенство $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$.

Отсюда легко получить требуемое неравенство:
$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\geq 3(a+b+c)abc$,
$a+b+c\geq 3abc$.

Задача 24

Условие

В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:
1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина - на третий;
2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.
На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий?

Решение

Ответ: с первого на третий этаж за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Первое решение. Предположим, что за весь день на первом этаже в лифт вошло x покупателей, на втором - y, на третьем - z. Заметим, что количество покупателей, вышедших из лифта на каждом из этажей, равно количеству покупателей, вошедших на этом же этаже.

По условию, из покупателей, вошедших на втором этаже, половина едет вниз, а половина - вверх. Значит, со второго этажа на третий едет $y/2$ покупателей, и столько же со второго на первый. Второе условие можно записать так: $z<(x+y+z)/3$. Это равносильно тому, что $2z<x+y$.

С первого этажа на третий было совершено $z-(y/2)$ поездок, так как всего на третьем этаже вышли из лифта z человек, а $y/2$ из них приехали со второго этажа. А с первого на второй поднимались те покупатели, входившие в лифт на первом этаже, кто не ехал на третий, т. е. $x-(z-(y/2))$. Для решения задачи требуется сравнить эти два выражения. Но неравенство $z-(y/2)<x-(z-(y/2))$ равносильно уже доказанному неравенству $2z<x+y$. Тем самым мы доказали, что с первого этажа на третий за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

Второе решение. Обозначим через n_{12} количество поездок с первого этажа на второй. Аналогично определим числа n_{13}, n_{21}, n_{23}, n_{31}, n_{32}. Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию задачи, первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с третьего этажа. Значит, последняя группа составляет более трети всех поездок:

$(n_{31}+n_{32})=(n_{13}+n_{23})<(n_{12}+n_{21})$.

Подставляя в это неравенство $n_{21}=n_{23}$, получим $n_{13}<n_{12}$: с первого этажа чаще ездили на второй, нежели на третий.

Задача 25

Условие

Дана геометрическая прогрессия. Известно, что её первый, десятый и тридцатый члены являются натуральными числами. Верно ли, что её двадцатый член также является натуральным числом?

Решение

Ответ: да, верно. Пусть a_1, a_2, ..., a_n, ... - данная геометрическая прогрессия, q - её знаменатель. По условию a_1, $a_{10}=a_1q^9$ и $a_{30}=a_1q^{29}$ - натуральные числа. Поэтому q^9 и q^{29} - положительные рациональные числа. Отсюда следует, что $q^2=q^{29}/(q^9)^3$ - положительное рациональное число и $q=q^9/(q^2)^4$ также положительное рациональное число.

Пусть $q=m/n$, где m и n - натуральные взаимно простые числа. Число $a_{30}=a_1m^{29}/n^{29}$ натуральное, m^{29} и n^{29} взаимно просты, следовательно, a_1 делится на n^{29}. Отсюда получаем, что $a_{20}=a_1q^{19}=a_1m^{19}/n^{19}$ - число натуральное.

Задача 26

Условие

Доказать неравенство

$$\frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}^{n}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1}} > \frac{1}{4}.$$

Решение

Пусть $a = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n-1}$. Тогда $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n} = \sqrt{2+a}$. Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a < 2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$8 - 4\sqrt{2+a} > 2 - a,$$

$$6 + a > 4\sqrt{2+a}.$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36 + 12a + a^2 > 32 + 16a$, т.е. $(a - 2)^2 > 0$.

Задача 27

Условие

Среди чисел a, b, c есть два одинаковых. А оставшееся число -- другое. Составьте такое арифметическое выражение из букв a, b, c, знаков +, -, ×, : и скобок, чтобы в результате вычислений получилось это число. (Скобки, знаки и буквы можно использовать любое количество раз.)

Решение

Например,

$$\frac{a(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)+(b-c)}+\frac{b(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)+(c-a)}+\frac{c(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)+(a-b)}.$$

Другой вариант:

$$\frac{a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)}{(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)}.$$