Геометрия

Задача 1

Ответ: $\frac{10}{9}$ или 5.

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB=10$, $AC=8$, $\angle BAC=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$. По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha}=\sqrt{100+64-2\cdot10\cdot8\cdot\frac{2}{5}}=10,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный, $BC=AB=10$.

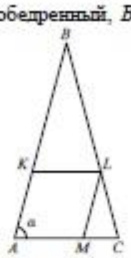


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине A (рис. 1). Пусть $AKLM$ — ромб со стороной x, причём вершина L ромба лежит на стороне BC треугольника ABC, а вершина M — на стороне AC. Треугольники KBL и ABC подобны, т.к. $KL \parallel AC$, значит, $\frac{KL}{AC}=\frac{BK}{AB}$, или $\frac{x}{8}=\frac{10-x}{10}$. Из этого уравнения находим, что $x=\frac{40}{9}$.

В случае, когда C — общий угол ромба и треугольника, получим тот же результат.

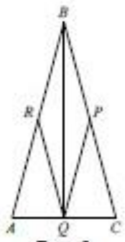
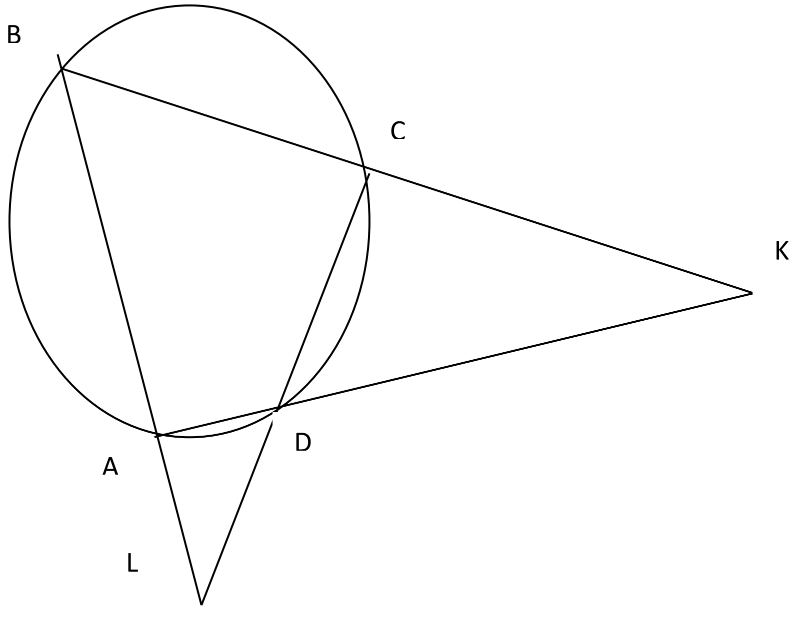


Рис. 2

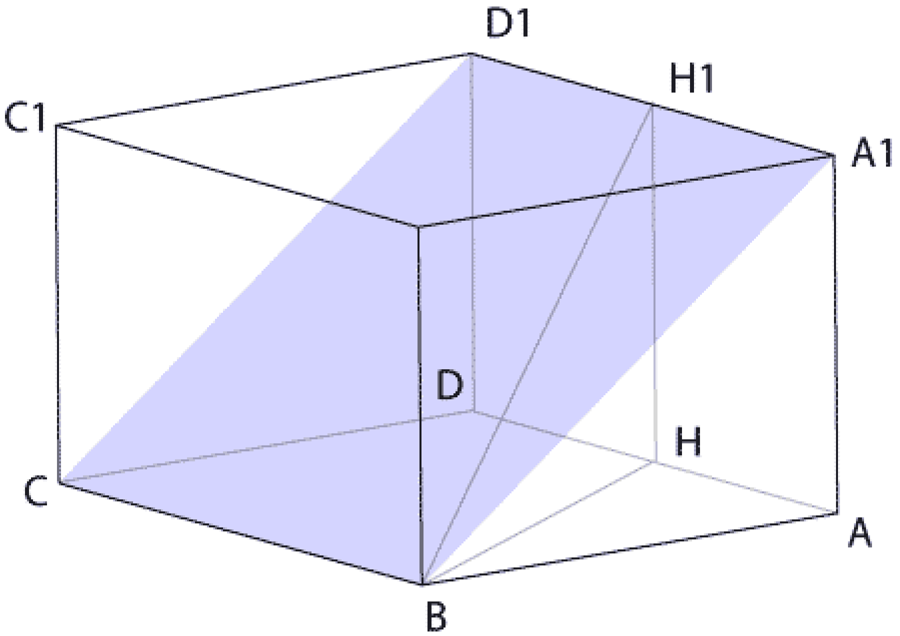
Предположим теперь, что общий угол треугольника и ромба – это угол при вершине B (рис. 2). Пусть $BPQR$ — ромб, причём вершина Q ромба лежит на основании AC треугольника ABC, а вершина R — на стороне AB. Точка Q — середина AC (т.к. BQ — биссектриса, а значит, и медиана равнобедренного треугольника ABC) и $QR \parallel BC$, поэтому QR — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $QR=\frac{1}{2}BC=5$.

Задача 2



Обозначим $\angle BAD = \alpha$, тогда по свойству противолежащих углов вписанного четырёхугольника $\angle BCD = 180^\circ - \alpha.$
Поскольку $\angle BAD -$ внешний угол треугольника $ADL,$ то $\angle ALD + \angle ADL = \alpha.$
Аналогично $\angle BCD -$ внешний угол треугольника CDK, и поэтому
$\angle CKD + \angle CDK = 180^\circ - \alpha.$
Отметим, что углы $\angle ADL$ и $\angle CDK$ равны, как вертикальные.
Поэтому, вычитая из второго равенства первое, получим
$\angle CKD - \angle ALD = 180^\circ - 2\alpha.$
Но по условию $\angle CKD - \angle ALD = 60^\circ.$
Следовательно, $\alpha = \angle BAD = 60^\circ.$
Ответ: 60.

Задача 3



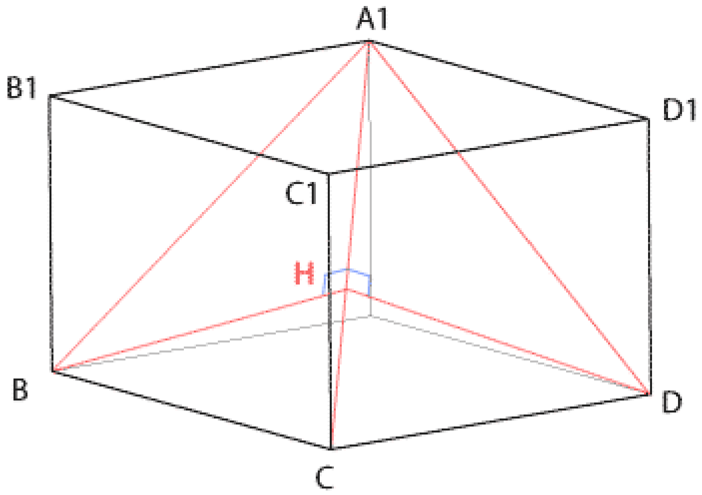
Опустим из точки B перпендикуляры - BH к AD и BH1 к A1D1. Треугольник H1BH - прямоугольный (так как параллелепипед прямой), угол H1BH по условию равен 45 градусов.
Значит, HH1 = BH*tg(45) = BH.
BH найдем из прямоугольного треугольника AHB. Угол ABH = 120-90 = 30 градусов.
Значит, BH = HH1 = боковое ребро = a*cos(30) = a*sqrt(3)/2.

Теперь сечение. Оно у нас параллелограмм, основание BC которого мы знаем, а высота = BH1.
Из треугольника H1BH: BH1 = BH*sqrt(2) = a*sqrt(2)*sqrt(3)/2 = a*sqrt(6)/2

Значит, площадь сечения = BH1*BC = a^2*sqrt(6)/2

Итак, ответ:
Боковое ребро = a * корень из трех пополам
Площадь сечения = a квадрат * корень из шести пополам
Ответ:
Боковое ребро = a * sqrt(3)/2, площадь сечения = a^2 * sqrt(6)/2

Задача 4



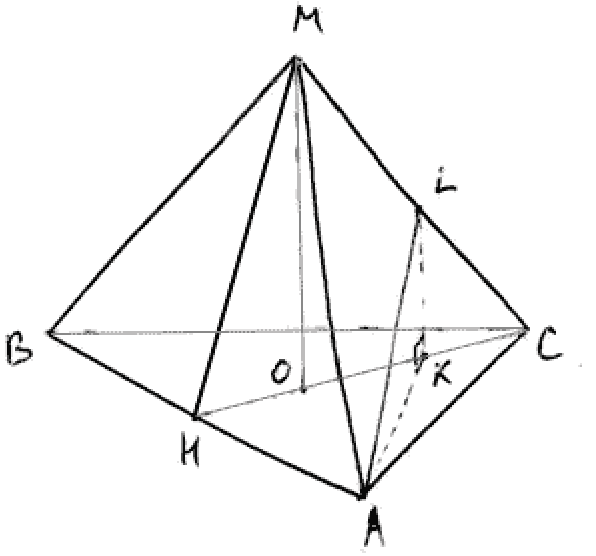
Для начала, предположим, что ребро куба равно 1. Диагональ куба тогда равна sqrt(3).
Рассмотрим треугольники A1CB и A1CD. Они равны по трем сторонам.
Опустим перпендикуляры к A1C из точек B и D. Раз треугольники равны, перпендикуляры тоже равны и попадают в одну точку H.
Таким образом, нам нужно найти величину угла BHD.

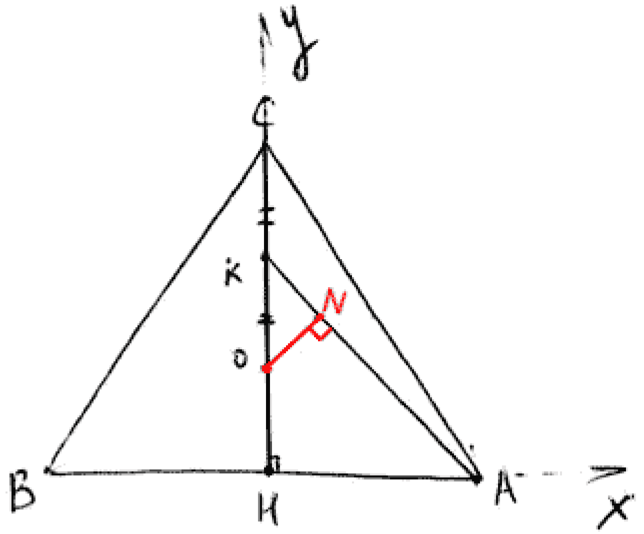
Для этого найдем длины BH и DH.
В прямоугольном треугольнике CHB CH = A1C/3 = sqrt(3)/3 (вот здесь это доказывается), CB = 1.
Значит, BD = sqrt(2)/sqrt(3).

Теперь в треугольнике BHD мы знаем все стороны и можем найти угол BHD по теореме косинусов.
Получится cos(BHD) = -1/2, т.е. BHD = 120 градусов.
Ответ:
120°

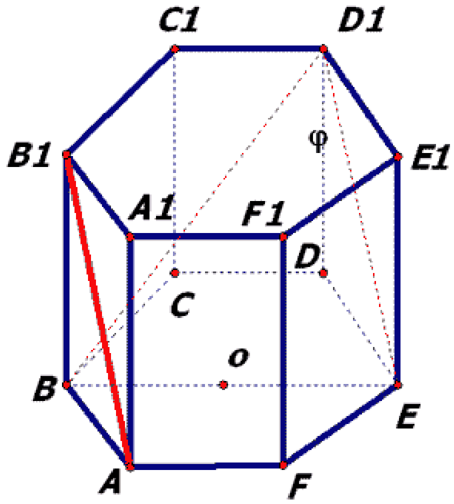
Задача 5

1. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми - это длина перпендикуляра, опущенного из одной прямой, к плоскости, параллельной этой прямой и содержащей вторую прямую.
2. Строим проекцию AK отрезка AL на плоскость ABC. Плоскость AKL перпендикулярна плоскости ABC, параллельна прямой MO и содержит прямую AL. Значит, искомая длина - это длина перпендикуляра ON, опущенного из точки O к AK.





3. Дальше всё можно найти по теореме Пифагора либо методом координат.
В ответе получится 1/(2*sqrt(7))
Ответ:
1/(2*sqrt(7))
Задача 6



Угол между BD_1 и AB_1 равен углу между BD_1 и D_1E: $D_1E \parallel AB_1$; $D_1E=AB_1$;

Рассмотрим $\triangle BD_1E$: $BE=2$; $BD_1=2$;

из $\triangle BD_1D$: $ED_1=\sqrt{2}$;

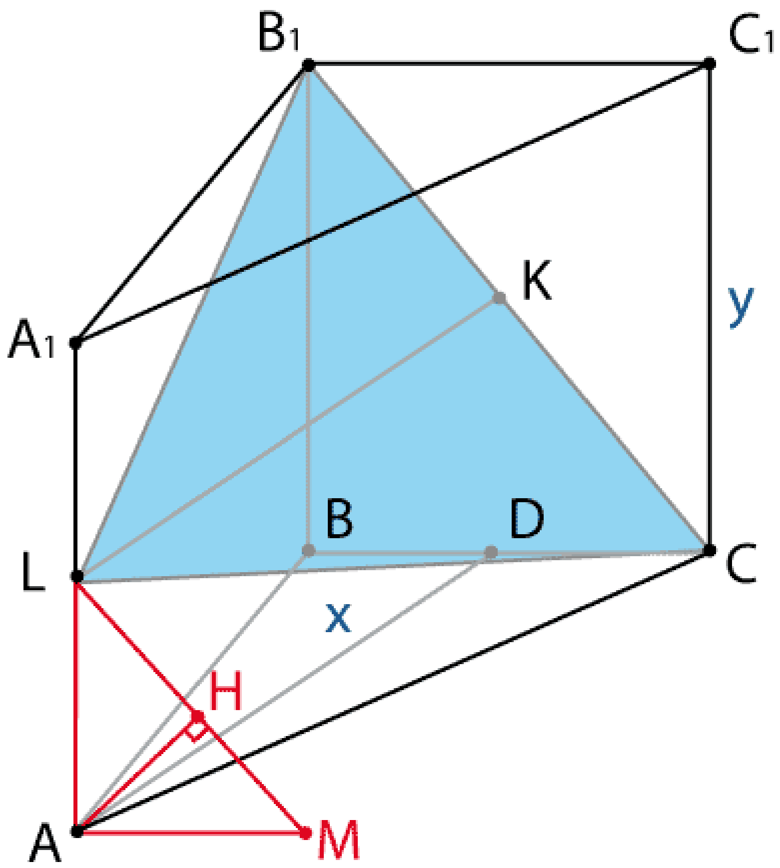
по теореме косинусов:

$4=4+2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cos\varphi$; $4\sqrt{2}\cos\varphi=2$;

$$\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 7



1. Разберёмся с сечением. Поскольку оно параллельно AD, то его плоскости принадлежит прямая LK, параллельная AD и проходящая через середину CB1. Отрезок LK равен AD, а поскольку K - середина CB1, то L - середина AA1.
2. Раз L - середина AA1, то LC = LB1, а значит, треугольник CLB1 - равнобедренный, и его площадь, которую нам надо найти, равна CB1*LK/2.

3. Пусть x = AD = LK, y = AA1 = BB1 = CC1.
Тогда из условий, что площадь боковой поверхности призмы равна 32, а BC=3, получаем
(AB+BC+AC)*AA1 = 32
y*(2*sqrt((3/2)^2+x^2)+3) = 32, или

y*(3+sqrt(9+4*x^2)) = 32 (1)

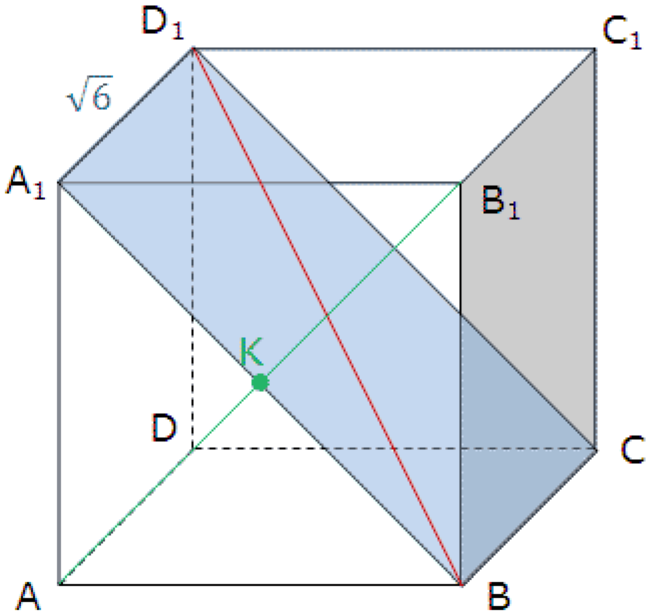
4. Расстояние AH от точки A до плоскости CLB1 равно расстоянию от A до прямой LM, параллельной CB1 и проходящей через точку L.
LAM - прямоугольный треугольник, где AM = DC = 3/2, AL = y/2.
Его площадь равна
1/2*AM*AL = 1/2*LM*AH.
Отсюда получаем
1/2*3/2*y/2 = 1/2*6/5*sqrt((3/2)^2+(y/2)^2)

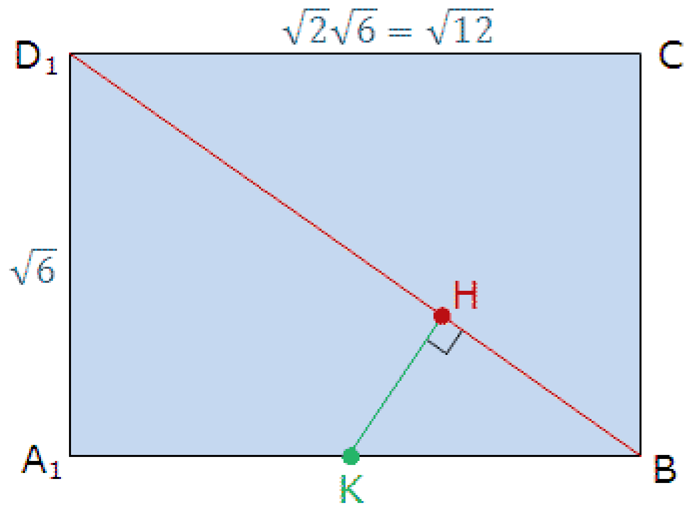
y = 4/5*sqrt(9+y^2) (2)

5. Из уравнения (2) находим, что высота призмы y = 4.
6. Из уравнения (1), зная y, находим, что высота основания призмы x = 2.

7. Площадь треугольника CLB1

S = x*sqrt(3^2+y^2)/2 = 2*sqrt(9+16)/2 = 5
Ответ:
5
Задача 8





$D_1B = \sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18}$

$\Delta KHB \sim \Delta D_1A_1B$

(по двум углам) $\Rightarrow$

$$\frac{KH}{KB} = \frac{A_1D_1}{D_1B}$$

$$KH = \frac{\sqrt{6}\sqrt{12}}{2\sqrt{18}} = 1$$

Задача 9

Поскольку треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, то AE = CE = BE, а это значит, что E - это проекция точки M на плоскость ABC и ME = 2*sqrt(3).

Пусть D - середина BC.
Искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра EH, опущенного из точки E к MD.
ED = AC/2 = 2.
Отсюда MD = sqrt(ME^2+ED^2) = sqrt(12+4) = 4.

Прямоугольные треугольники EHD и MED подобны (угол D общий), значит, ED/MD = EH/ME.

Отсюда
EH = ME/2 = sqrt(3).
Ответ:
sqrt(3)
Задача 10
Заметим, что AD параллельно BC, а значит, и всей плоскости BCS. Это значит, что все точки прямой AD равноудалены от плоскости BCS.
Пусть SH — высота треугольника BCS, SO — перпендикуляр, опущенный из точки S к плоскости основания пирамиды, при этом точка O принадлежит AD. Искомым расстоянием будет длина высоты OM прямоугольного треугольника SOH.

1) Найдём OH из равностороннего треугольника OBC: OH = BC*sqrt(3)/2 = 3/2
2) Найдём SH из прямоугольного треугольника BHS: SH = sqrt(SB^2-BH^2) = sqrt(sqrt(7)^2-(sqrt(3)/2)^2) = 5/2
3) Найдём SO из прямоугольного треугольника SOH: SO = sqrt(SH^2-OH^2) = 4/2
4) Искомое расстояние OM, зная все стороны прямоугольного треугольника SOH, можно, например, найти, записав выражение для его площади двумя разными способами:
S = SO*OH/2 = SH*OM/2, откуда
OM = SO*OH/SH = 4*3/5 = 6/5
Ответ:
6/5
Задача 11
Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°$, откуда $AB = 2O_1A \cdot \cos 15° = 6 \cdot \cos 15°$, $AC = 2O_2A \cdot \cos 15° = 10 \cdot \cos 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 4 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 10 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 2{,}5.$$

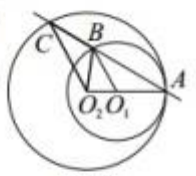


Рис. 1

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, $BC = AC + AB = 16 \cdot \cos 15°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC \cdot CO_2 \cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 40 \cdot \cos 15° \cdot \sin 15° = 10.$$

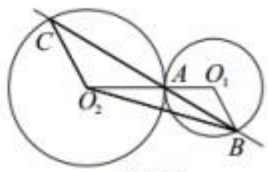
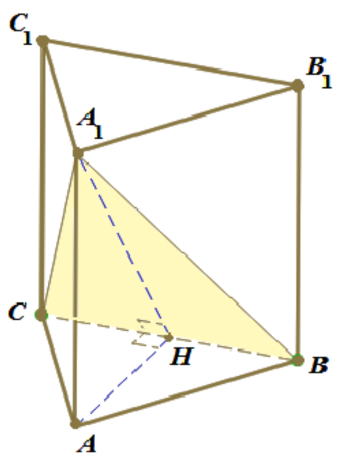


Рис. 2

Ответ: 2,5 или 10.

Задача 12
Обозначим середину ребра *BC* буквой *H*. Отрезки *AH* и A_1H перпендикулярны *BC*, так как треугольник *ABC* - равносторонний, а A_1BC - равнобедренный.
Следовательно, угол A_1HA - линейный угол двугранного угла с гранями *BCA* и BCA_1.
Рассмотрим треугольник A_1AB: по теореме Пифагора найдем AA_1=1.



Рассмотрим треугольник AHB: по теореме Пифагора найдем AH=$\sqrt{3}$.
Из треугольника HAA_1 находим:

$$A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Отсюда находим: угол $A_1HA=30^o$.
Ответ. 30^o.

Алгебра, тригонометрия

Задача 13

Сделаем замену переменной $t = \log_2 x.$ неравенство принимает вид

$$\frac{t-5}{1-2t} \geq 2t \Leftrightarrow 0 \geq 2t + \frac{t-5}{2t-1} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{4t^2 - t - 5}{2t-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1, \\ \frac{1}{2} < t \leq \frac{5}{4}, \end{array}\right. \text{или} \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt[4]{2}. \end{array}\right.$$

ОТВЕТ: $0 < x \leq \frac{1}{2} и \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt[4]{2}.$

Задача 14

1) Запишем уравнение иначе:

$(tg^2x+1)+3tgx-5=0;$

$tg^2x+3tgx-4=0;$

tgx=1 или tgx=-4.

Следовательно, x=π/4+πk или x=-arctg4+πk. Отрезку [-π; π/2] принадлежат корни -3π/4, -arctg4,π/ 4.

Ответ: -3π/4,-arctg4,π/4.

Задача 15

Знаменатель не должен обращаться в ноль:
2cos(x)+1 ≠ 0
cos(x) ≠ -1/2
(1) x ≠ ±2π/3 + 2πn, n ∈ Z
Числитель должен обращаться в ноль:
4sin2(x)-3 = 0

sin2(x) = 3/4

sin(x) = ± √3/2

отсюда

x = ±π/3 + πn, n ∈ Z или, что то же самое,

{x = ±2π/3 + 2πn; x = ±π/3 + 2πn}, n ∈ Z.

Принимая во внимание (1), получаем ответ:
$x = \pm\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ:

$\pm\pi/3 + 2\pi n$

Задача 16

система
cos(x)+sqrt(2)/2 = 0
x-pi/4 не равно pi/2+pi*n

x = (+/-)3*pi/4 + 2*pi*n
x не равно 3*pi/4 + pi*n

откуда

x = -3*pi/4 + 2*pi*n

2. уравнение

tg(x - pi/4) = 1
x - pi/4 = pi/4 + pi*n

x = pi/2 + pi*n
Значит, все корни уравнения:

x = -3*pi/4 + 2*pi*n, x = pi/2 + pi*n

На отрезке [0,2*pi] будет три корня: pi/2, 5*pi/4 и 3*pi/2.>Ответ: 3

Задача 17

Во втором уравнении системы произведение двух множителей равно нулю. Это возможно, если один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл. Рассмотрим два возможных случая:

1) $\begin{cases} y = -\sin x, \\ \sqrt{\sin x} = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -\sin x, \\ y = -\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow \sin x = 1{,}5.$

$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{16}, \\ x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{16} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$ Нет решений, т.к. $-1 \le \sin x \le 1.$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{16} + \pi n, n \in Z$, $y = -\dfrac{1}{16}$.

Задача 18

Ну, насколько я понял, неравенство вот такое:
(25x-3x^2+18)*sqrt(x-1)/(log_4(|x-7|)-1) >= 0,
т.е. в знаменателе (логарифм по основанию 4 от |x-7|)-1.

1. Итак, для начала решим неравенство.
1.1. В числителе есть корень, значит, x>= 1
1.2. Квадратный двучлен в числителе раскладывается на -3(x+2/3)(x-9)
1.3. Разберемся со знаменателем.
1.3.1. Заметим, что x не может быть равен 7
1.3.2. Решим неравенство log_4(|x-7|)-1>0
|x-7| > 4 => x < 3 или x > 11
Поскольку мы решаем неравенство, и для нас важен только знак, то можно считать, что знаменатель ведет себя точно также, как (x-3)(x-11) (но только не надо забывать, что точку x=7 нужно "выколоть").

1.4. Итак, наше неравенство можно представить как систему:
x>=1
x не равен 7
-3(x+2/3)(x-9)/((x-3)(x-11)) >=0

Методом интервалов получим решение:
x принадлежит [1;3) и [9;11)

2. Теперь посмотрим на выражение 3sin(a)+5.
Поскольку значения синуса лежат внутри отрезка [-1;1], то это выражение может принимать значения в пределах отрезка [2;8].
То есть во второй полуинтервал из решения неравенства оно точно не попадает, а в первый попадает, если оно меньше 3, т.е.
3*sin(a)+5 < 3
sin(a) < -2/3
Итак, sin(a) может лежать в полуинтервале [-1;-2/3)

3. Осталось разобрать последнее условие - что 9cos2a-36sina-18 тоже является

решением неравенства.
cos(2a) = 1-2sin^2(a) => выражение превращается в
9(1-2sin^2(a))-36sin(a)-18 = -18sin^2(a)-36sin(a)-9

заменим sin(a) на t и посмотрим, как ведёт себя функция y(t)=-18t^2-36t-9
на уже найденном полуинтервале [-1;-2/3).
y'(t) = -36t-36
единственный экстремум - в точке -1, и это максимум. Следовательно, функция на рассматриваемом полуинтервале всюду убывает.
y(-1) = 9
y(-2/3) = 7

Это значит, что наше второе выражение является решением неравенства только в том случае, если оно равно 9, т.е. когда sin(a) = -1

Так что ответ -
a = -пи/2 + 2пи*n
Задача 19
Раскроем модуль:

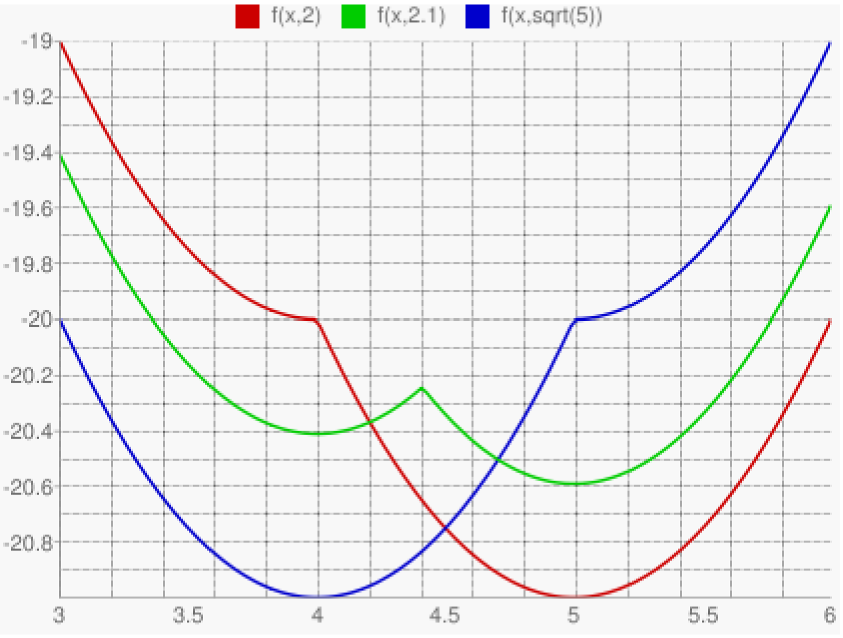
При x <= a^2: f(x) = x^2 - 8x - a^2,
при x > a^2: f(x) = x^2 - 10x + a^2.

Производная левой части: f'(x) = 2x - 8
Производная правой части: f'(x) = 2x - 10

И левая, и правая части могут иметь только минимум. Значит, единственный максимум у функции f(x) может быть в том и только в том случае, если в точке x=a^2 левая часть возрастает (то есть 2x-8 > 0), а правая — убывает (то есть 2x-10 < 0).

То есть, получаем систему:
2x-8 > 0
2x-10 < 0
x = a^2

откуда
4 < a^2 < 5



a ∈ (-sqrt(5); -2) ∪ (2; sqrt(5))

Ответ: (-sqrt(5); -2) ∪ (2; sqrt(5))

Задача 20
Любое натуральное число N представимо в виде произведения
N = (p1^k1)*(p2^k2)*... и т.д.,
где p1, p2 и т.д. - простые числа, а k1, k2 и т.д. - целые неотрицательные числа.

Например,
15 = (3^1)*(5^1)
72 = 8*9 = (2^3)*(3^2)

Так вот, общее количество натуральных делителей числа N равно
(k1+1)*(k2+1)*...

Итак, по условию, P = N1*N2*...*N11, где
N1 = (p1^k[1,1])*(p2^k[1,2])*...
N2 = (p1^k[2,1])*(p2^k[2,2])*...
...,
а это значит, что
P = (p1^(k[1,1]+k[2,1]+...+k[11,1]))*(p2^(k[1,2]+k[2,2]+...+k[11,2]))*...,

и общее количество натуральных делителей числа P равно

(k[1,1]+k[2,1]+...+k[11,1]+1)*(k[1,2]+k[2,2]+...+k[11,2]+1)*...

Это выражение принимает минимальное значение, если все числа N1...N11 являются последовательными натуральными степенями одного и того же простого числа, начиная с 1: N1 = p, N2 = p^2, ... N11 = p^11.

То есть, например,
N1 = 2^1 = 2,
N2 = 2^2 = 4,
N3 = 2^3 = 8,
...
N11 = 2^11 = 2048.

Тогда количество натуральных делителей числа P равно
1+(1+2+3+...+11) = 67.

Ответ: 67

Задача 21

Каждое натуральное число может быть либо четным (2*k), либо нечетным (2*k+1).

1. Если число нечетное:
n = 2*k+1 = (k)+(k+1). Числа k и k+1 всегда взаимно простые

(если есть некоторое число d, являющееся делителем x и y, то число |x-y| тоже должно делиться на d. (k+1)-(k) = 1, то есть 1 должно делиться на d, то есть d=1, а это и есть доказательство взаимной простоты)

То есть мы доказали, что все нечетные числа могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых.
Исключением по условию будут являться числа 1 и 3, поскольку 1 вообще нельзя представить в виде суммы натуральных, а 3 = 2+1 и никак иначе, а единица в качестве слагаемого не подходит по условию.

2. Если число четное:
n = 2*k
Тут придется рассмотреть два случая:

2.1. k - четное, т.е. представимое в виде k = 2*m.
Тогда n = 4*m = (2*m+1)+(2*m-1).
Числа (2*m+1) и (2*m-1) могут иметь общий делитель только такой (см. выше), на который делится число (2*m+1)-(2*m-1) = 2. 2 делится на 1 и 2.
Но если делитель равен 2, то получается, что нечетное число 2*m+1 должно делиться на 2. Этого не может быть, поэтому остается только 1.

Так мы доказали, что все числа вида 4*m (то есть кратные 4) тоже могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых.
Тут исключение - число 4 (m=1), которое хотя и может быть представлено в виде 1+3, но единица в качестве слагаемого нам по-прежнему не подходит.

2.1. k - нечетное, т.е. представимое в виде k = 2*m-1.
Тогда n = 2*(2*m-1) = 4*m-2 = (2*m-3)+(2*m+1)
Числа (2*m-3) и (2*m+1) могут иметь общий делитель, на который делится число 4. То есть либо 1, либо 2, либо 4. Но ни 2, ни 4 не годятся, поскольку (2*m+1) - число нечетное, и ни на 2, ни на 4 делиться не может.

Так мы доказали, что все числа вида 4*m-2 (то есть все кратные 2, но не кратные 4) тоже могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых.
Тут исключения - числа 2 (m=1) и 6 (m=2), у которых одно из слагаемых в разложении на пару взаимно простых равно единице.

Ответ: 1,2,3,4,6

Задача 22
На самом деле, это неравенство значительно проще, чем кажется на первый взгляд.

Разберёмся с ОДЗ:
1. Выражение под первым знаком логарифма должно быть больше нуля:
(7^(-(x^2))-3)*(7^(-(x^2)+16)-1) > 0

-x^2 всегда меньше или равно нулю, следовательно,
7^(-x^2) <= 1, следовательно,
7^(-x^2)-3 <= -2 < 0

Значит, чтобы первое условие на ОДЗ выполнялось, нужно, чтобы
7^(-(x^2)+16)-1 < 0
7^(-(x^2)+16) < 1 = 7^0
-(x^2)+16 < 0
x^2 > 16
x принадлежит (-бесконечность; -4) U (4, +бесконечность)

2. Выражение под вторым знаком логарифма должно быть больше нуля. Но там результат будет такой же, как и в первом пункте, поскольку в скобках стоят одинаковые выражения.

3. Выражение под третьим знаком логарифма должно быть больше нуля.
(7^(7-x^2)-2)^2 > 0
Это неравенство всегда справедливо, за исключением случая, когда
7^(7-x^2)-2 = 0
7^(7-x^2) = 7^(log_7(2))
7-x^2 = log_7(2)
x^2 = 7 - log_7(2)
x = (+-)sqrt(7-log_7(x))

Оценим, чему примерно равно sqrt(7-log_7(x)).
1/3 = log_8(2) < log_7(2) < log_4(2) = 1/2
2 = sqrt(4) < sqrt(7-1/2) < sqrt(7-log_7(2)) < sqrt(7-1/3) < sqrt(9) = 3

То есть, условие x не равно (+-)sqrt(7-log_7(x)) уже лишнее, поскольку в п. (1) мы уже выбросили из ОДЗ включающий эти точки интервал.

Итак, ещё раз ОДЗ:
x принадлежит (-бесконечность; -4) U (4, +бесконечность)

4. Теперь, пользуясь свойствами логарифма, исходное неравенство можно преобразовать вот так:
log_2((7^(-x^2)-3)^2) > log_2((7^(7-x^2)-2)^2)

log_2(x) - функция возрастающая, поэтому избавляемся от логарифма, не меняя знак:
(7^(-x^2)-3)^2 > (7^(7-x^2)-2)^2

Оценим сверху и снизу выражения (7^(-x^2)-3)^2 и (7^(7-x^2)-2)^2 , принимая во внимание ОДЗ:

-x^2 < -16
0 < 7^(-x^2) < 1
-3 < 7^(-x^2)-3 < -2
4 < (7^(-x^2)-3)^2 < 9

-x^2 < -16
0 < 7^(7-x^2) < 1
-2 < 7^(-x^2)-2 < -1
1 < **(7^(-x^2)-3)^2** < 4

Значит, неравенство выполняется для любых x, принадлежащих ОДЗ.

Ответ:

(−∞; -4) ∪ (4; +∞)
Задача 23
Сперва найдём ОДЗ.

1.1) Условие на основание логарифма:
|x| > 0 => x <> 0 (здесь и дальше "<>" значит "не равно")
1.2) Условие на основание логарифма:
|x| <> 1 => x <> -1, x <> 1
1.3) Условие на выражение под знаком квадратного корня:
9-x^2 >= 0 => (3-x)(3+x) >= 0 => x принадлежит [-3;3]
1.4) Условие на выражение под знаком логарифма:
sqrt(9-x^2)-x-1 > 0
sqrt(9-x^2) > x+1 =>
1.4.1) либо (x+1) < 0 => x < -1
1.4.2) либо система
{9-x^2 > (x+1)^2, x >= -1}
Решая первое неравенство системы, получим
x принадлежит ((-1-sqrt(17))/2; (-1+sqrt(17))/2).
Поскольку sqrt(17) - это примерно sqrt(16)=4, то
(-1-sqrt(17))/2 примерно равно -2.5
(-1+sqrt(17))/2 примерно равно 1.5
Итак, в (1.4.2) у нас получается:

x принадлежит [-1;-1+sqrt(17))/2)

Объединяя все условия из (1.3) и (1.4), имеем:
x принадлежит [-3 ; (sqrt(17)-1)/2)

Объединив это с (1.1) и (1.2), имеем полное ОДЗ:
[-3; -1) U (-1;0) U (0;1) U (1; (sqrt(17)-1)/2)

Теперь, собственно, само неравенство.
В зависимости от значения x у нас будет тут четыре случая:

2.1) x < -1 => abs(x) = -x > 1
log_(-x)(sqrt(9-x^2)-x-1) >= 1
Основание логарифма больше единицы => функция возрастающая => при потенциировании неравенство знак не меняет:

sqrt(9-x^2)-x-1 >= -x
9-x^2 >= 1
x^2 <= 8
x принадлежит [-2sqrt(2); 2sqrt(2)]
(sqrt(2) - это примерно 1.4, следовательно, 2sqrt(2) = примерно 2.8)
Итого в (2.1) имеем:
x принадлежит [-2sqrt(2);-1)

2.2) -1 < x < 0 => abs(x) = -x < 1
log_(-x)(sqrt(9-x^2)-x-1) >= 1
Основание логарифма меньше единицы => функция убывающая => при потенциировании неравенство меняет знак:
sqrt(9-x^2)-x-1 <= -x
x^2 >= 8
x принадлежит (-бесконечность; -2sqrt(2)] U [2sqrt(2); бесконечность).
С условием -1 < x < 0 это не пересекается, значит, в случае (2.2) решений нет.

2.3) 0 < x < 1 => abs(x) = x < 1
log_(x)(sqrt(9-x^2)-x-1) >= 1
Основание логарифма меньше единицы => функция убывающая => при потенциировании неравенство меняет знак:
sqrt(9-x^2)-x-1 <= x
В общем, решается это примерно также, как (1.4). Получится
2(sqrt(11)-1)/5 <= x <= 3

Тут нам важно понять, 2(sqrt(11)-1)/5 больше или меньше 1.
Решение в случае (2.3) будет только если
2(sqrt(11)-1)/5 < 1 => sqrt(11) < 3.5.
3.5^2 = 12.25 > 11, то есть в случае (2.3) мы всё-таки будем иметь решение
[2(sqrt(11)-1)/5; 1)

2.4) x > 1 => abs(x) = x > 1

log_(x)(sqrt(9-x^2)-x-1) >= 1
Основание логарифма больше единицы => функция возрастающая => при потенциировании неравенство знак не меняет:
sqrt(9-x^2)-x-1 >= x
Такое же неравенство, но с обратным знаком, мы уже только что решили, и выяснили, что больший корень меньше единицы. Следовательно, тут решений нет.

Итак, из (2.1) и (2.3) имеем:
x принадлежит [-2sqrt(2);-1) U [2(sqrt(11)-1)/5; 1)
Задача 24
Пусть $t = 7^{-x^2}, 0 < t \leq 1,$ тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-3)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_2\frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2\left(7^7t-2\right)^2.$$

Так как $t-3<0,$ то $7^{16}t-1<0,$ а значит, $0 < t < \frac{1}{7^{16}} < \frac{2}{7^7}.$
Получаем:

$$\begin{cases}\log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7t-2)^2,\\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|t-3| > |7^7t-2|,\\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-t > 2-7^7t,\\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}\end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}.$$

Поясним: неравенство $3-t > 2-7^7t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t > -1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 4,\\ x < -4.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty).$
Задача 25
Область допустимых значений неравенства задается соотношениеми

$$\begin{cases}\log_x 2x > 0,\\ \log_x 2x \neq 1,\\ 6x-2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2},\\ x > 1.\end{array}\right.$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{b-1} \geq 0, \log_a b - \log_a c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-1} \geq 0,$$

$$a^b - a^c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c) \geq 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-3}{\log_x 2x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x-1)}{\log_x 2x - \log_x x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} \geq 0.$$

Заметим, что

$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64=5^x\cdot 4^x-64\cdot 5^x-(4^x-64)=5^x(4^x-64)-(4^x-64)=(5^x-1)(4^x-64)$

.

Поэтому

$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\le 0\Leftrightarrow (5^x-1)(4^x-64)\le 0\Leftrightarrow (5^x-5^0)(4^x-4^3)\le 0\Leftrightarrow 4x\cdot 3(x-3)\le 0$

.

Окончательно имеем:

$$\begin{cases} x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty), \\ \dfrac{2x-1}{x(x-1)}\ge 0, \\ x(x-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty), \\ x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty), \\ 0\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(1,3].$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(1,3]$.

Задача 26

Заметим, что из условия следует, что $k\in\mathbb{N}$. Далее имеем:

1. Если $m=0$, то каждое из слагаемых равно 1, и при $k=2010$ равенство будет верно.

2. Если $m<0$, левая часть уравнения не превосходит суммы конечной геометрической прогрессии с первым членом 3^{-1} и знаменателем 3^{-1}, сумма которой, в свою очередь, меньше суммы бесконечно убывающей прогрессии с тем же первым членом и тем же знаменателем:

$$3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}\le 3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}<3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}+\ldots<\frac{3^{-1}}{1-3^{-1}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение решений не имеет.

3. Если $m>0$, то $3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=3^m\dfrac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1}$, откуда получаем:

$$3^m\frac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1}=2010\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=2010\cdot(3^m-1)\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=3\cdot 670\cdot(3^m-1).$$

Числа 670 и 3^m-1 на три нацело не делятся, следовательно, $m=1$, откуда $3^k-1=670\cdot 2$ и $3^k=1341$. Последнее уравнение натуральных решений не имеет.

Ответ: $m=0,\ k=2010$.

Задача 27

Случай а). Пусть числа $\frac{b}{q^2},\frac{b}{q},b,bq,bq^2,$ где по условию b — натуральное число, $q>0,\ b\ge 2,\ q\ne 1$ — искомые члены прогрессии. Их произведение равно b^5 но уравнение $b^5=1512$ не имеет натуральных решений. Итак, необходимой прогрессии из 5 чисел не существует.

Случай б). Пусть прогрессия состоит из четырех членов $\frac{b}{q}, b, bq, bq^2,$ а пятое натуральное число равно $k.$ Поскольку $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1,$ имеем: $b^4q^2k = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1,$ что невозможно для натуральных b^4, q^2 и k поскольку разложение числа 1512 не содержит четвертых степеней простых сомножителей отличных от 1. Заметим однако, что знаменатель прогрессии q может не быть натуральным числом и исследуем этот случай. Пусть $q = \frac{m}{n}$ — несократимая
дробь, $m, n \in \mathbb{N}.$ Тогда $bq^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow b \vdots n^2 \Rightarrow b^4 \vdots n^8 \Rightarrow b^4q^2k \vdots n^6,$ что невозможно, так как разложение числа 1512 не содержит шестых степеней простых сомножителей отличных от 1.

Случай в). Пусть прогрессия состоит из трех членов $\frac{b}{q}, b, bq,$ а четвертое и пятое натуральные числа равны k и $l.$Тогда $b^3kl = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1.$ Положим в этом равенстве $b = 6, k = 7, l = 1.$ Далее, полагая $q = 2,$ получим один из требуемых наборов чисел: 3, 6, 12, 7, 1.
Ответ: а) нет; б) нет; в) да.
Задача 28
Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x > 8.$$

Если $a = -1$, то неравенство, а значит, и система не имеет решений. Если $a > -1$, то решение неравенства — луч

$$x > \frac{8}{1+a}.$$

Если $a < -1$, то решение неравенства — луч

$$x < \frac{8}{1+a}.$$

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1+a)\left(x + \frac{a}{1+a}\right)(x - 2(1+a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1+a). \end{cases}$$

Если $a > -1$, то решение этой системы — два луча с концами в точках $-\frac{a}{1+a},\ 2(1+a)$. Если $a < -1$, то решение этой системы — полуинтервал с концами в точках $-\frac{a}{1+a}, 2(1+a)$.

Отметим, что точки $x = 2(1+a)$ нет во множестве решений второго неравенства. Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a < -1, \\ -\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \ge \dfrac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \le a < -1, \\ (1+a)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le a < -1.$$

Учитывая случай $a = -1$, получаем ответ.
Ответ: $-3 \le a \le -1$.

Задача 29
Преобразуем данную систему:

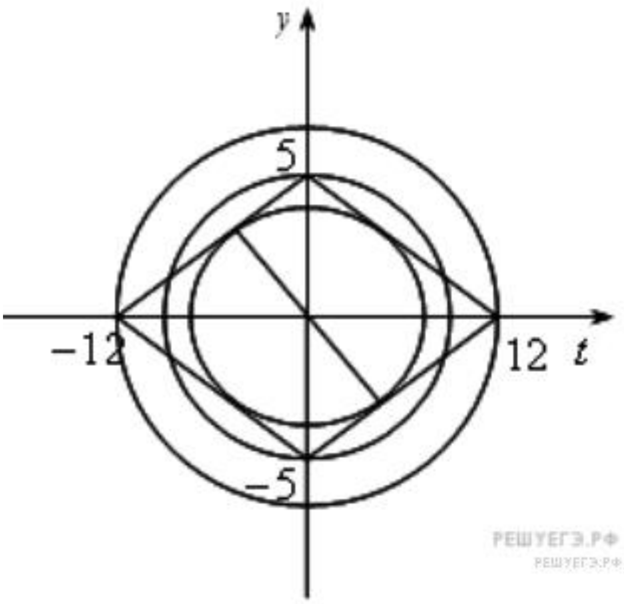
$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x+2| + 12|y| = 60, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t = x + 2$, получаем систему

$$\begin{cases} 5|t| + 12|y| = 60, & (1) \\ y^2 + t^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат *Oty*.

График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 24 и 10, лежат соответственно на осях *x* и *Ot*, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$ (см. рисунок).



Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет соотношению $0,5d_1 < r < 0,5d_2$, где $0,5d_1 = 5,\ 0,5d_2 = 12$ — половины меньшей и большей диагоналей ромба соответственно. Радиус вписанной в ромб окружности равен высоте прямоугольного треугольника с катетами, равными 5 и 12, откуда

$r = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}.$

Таким образом, система имеет 4 ровно решения, если $|a| = \frac{60}{13}$ или $5 < |a| < 12$, откуда $a = \pm\frac{60}{13}$, $-12 < a < -5$ или $5 < a < 12$.

Графики имеют 8 общих точек, если радиус окружности удовлетворяет условию $r_1 < r < 0,5d_1$, где r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб.

Тогда $\frac{60}{13} < |a| < 5$, откуда

$-5 < a < -\frac{60}{13}, \frac{60}{13} < a < 5.$

Ответ: а) $a = \pm\frac{60}{13}, -12 < a < -5, 5 < a < 12;$

б) $-5 < a < -\frac{60}{13}, \frac{60}{13} < a < 5.$

Задача 30

Введём обозначения: $a - 4 = b$, $f(x) = x^4 + b^2$, $g(x) = |x - b| + |x + b|$. В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x) = g(x)$.

Заметим, что $g(x) = 2|x|$ при $|x| \geq |b|$, $g(x) = 2|b|$ при $|x| < |b|$.

Пусть $|b| \geq 2$ покажем, что в этом случае уравнение $f(x) = g(x)$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Действительно, если $|x| \geq |b|$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq 2x^2 \cdot |b| > 2|x| = g(x)$.

Если $|x| < |b|$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq b^2 \geq 2|b| = g(x)$, причём равенство достигается только при $|b| = 2$ и $x = 0$.

При $|b| < 2$ верны неравенства $f(0) \leq g(0)$ и $f(2) > g(2)$, так как $b^2 \leq 2|b|$ и $16 + b^2 > 4$. Значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решение.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение f (x) = g (x) имеет единственное решение, то это решение $x = 0$.

Решим уравнение $f(0) = g(0)$ относительно $b : b_2 = 2|b| \Leftrightarrow |b| \cdot (|b| - 2) = 0$, значит, $x = 0$ является решением уравнения $f(x) = g(x)$ при $b = 0$ или $|b| = 2$.

Случай, когда $|b| = 2$, уже был разобран.

При $b = 0$ уравнение принимает вид $x^4 = 2|x|$ и имеет три различных решения: $x = -\sqrt[3]{2}, x = 0, x = \sqrt[3]{2}.$

Таким образом, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b \leq -2$ и $b \geq 2$, то есть при $a \leq 2$ и $a \geq 6$.

Ответ: $a \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.