

Геометрия

1. Две стороны треугольника равны 8 и 10, косинус угла между ними равен $2/5$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.
2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке L , а лучи BC и AD – в точке K . Найдите угол $\angle BAD$, если $\angle CKD - \angle ALD = 60^\circ$.
3. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб со стороной, равной a , угол $ABC = 120$. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 45 . Найдите длину бокового ребра и площадь сечения.
4. Диагональ $A_1 C$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через вершины B и D . Найдите величину этого угла.
5. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. найдите расстояние между прямыми AL и MO , где L – середина ребра MC , O – центр грани ABC
6. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .
7. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC , у которого основание BC равно 3. Боковая поверхность призмы равна 32. Найдите площадь сечения призмы плоскости проходящей через CB_1 параллельно высоте основания AD . Расстояние от A до плоскости сечения равно $6/5$.
8. Ребро куба равно корень из 6. Найдите расстояние между диагональю куба и диагональю любой из его граней.
9. Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол $C = 90$ градусов). $AC = BC = 4$ см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2 \cdot \sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки E – середины стороны AB – до плоскости BMC .
10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = \sqrt{3}$, боковое ребро $SA = \sqrt{7}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BCS .
11. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает меньшую окружность в точке B , а большую – в точке C . Найдите площадь треугольника BCO_2 , если угол $ABO_1 = 150$
12. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, сторона основания которой равна 2, диагональ боковой грани $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.

Алгебра, тригонометрия.

13. Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - \log_2 x^2} \geq 2 \log_2 x$.

14. $1/\cos 2x + 3 \operatorname{tg} x - 5 = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi/2]$.
15. Решите уравнение
 $(4\sin^2(x) - 3)/(2\cos(x) + 1) = 0$
16. $(\cos x + \sqrt{2})/2 (\operatorname{tg}(x - \pi/4) - 1) = 0$
 сколько корней на отрезке $[0; 2\pi]$
17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (4\sqrt{\sin x} - 1)(2y + 3) = 0. \end{cases}$$

18. Найдите все значения a , при каждом из которых оба числа $3\sin a + 5$ и $9\cos 2a - 3b\sin a - 18$ являются решением неравенства в числителе $(25x - 3x^2 + 18) \cdot \sqrt{x(x-1)}$, в знаменателе $\log(\text{модуль}(x-7)) - 1$ осн. 4 ≥ 0
19. Найти все значения параметра a , при которых функция $f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$ имеет хотя бы одну точку максимума.
20. Число P равно произведению 11 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь число P ?
21. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.
22. $\log_2((7 - x^2 - 3) \cdot (7^{-x^2 + 16} - 1)) + \log_2((7 - x^2 - 3)/(7^{-x^2 + 16} - 1)) > \log_2(77 - x^2 - 2)$
23. Решить неравенство:
 $\log_{|x|}(\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geq 1$
24. $\log_2 \left((7^{-x^2} - 3) (7^{-x^2 + 16} - 1) \right) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2 + 16} - 1} > \log_2 (7^{7 - x^2} - 2)^2$.
25. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(6x - 2) \geq 0, \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0. \end{cases}$
26. Найдите все целые значения m и k такие, что $3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \dots + 3^{k \cdot m} = 2010$.
27. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и
 а) пять;
 б) четыре;
 в) три
 из них образуют геометрическую прогрессию?
28. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} \frac{x + ax + a}{x - 2a - 2} \geq 0, \\ x + ax > 8 \end{cases}$ не имеет решений.

29. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравне-

$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

ний имеет

а) ровно четыре решения,

б) ровно 8 решений.

30. Найдите все значения a , при каждом из которых уравне-

ние $x^4 + (a-4)^2 = |x-a+4| + |x+a-4|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.