

1 тур (каждая задача 6 баллов) 10 минут

1.1. Делится ли число $\underbrace{55 \dots 5}_{2014 \text{ цифр}}$ на 3? Ответ обоснуйте.

Решение: Признак делимости на 3: если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3. Найдем сумму цифр числа $5 \cdot 2014 = 10070$. Число 10070 на три не делится, значит и наше число на 3 не делится.

Ответ: Исходное число на 3 не делится.

1.2. Александр задумал число, которое сначала уменьшил на 15, затем уменьшил в 8 раз и получил результат, который на 2 меньше исходного. Какое число задумал Александр?

Решение: Составим уравнение:

$$\begin{aligned} \text{Пусть } x - \text{ задуманное число. } (x - 15): 8 = x - 2; \quad x - 15 = (x - 2) \cdot \\ 8; \quad x - 15 = 8x - 16; \quad 7x = 1; \quad x = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

1.3. Когда организаторов Математической регаты спросили, сколько команд будет участвовать, то первый организатор сказал, что число команд больше 26, но меньше 30. Второй ответил, что число команд больше 28, но меньше 31. А третий ответил, что команд больше 27, но меньше 31. Сколько команд должно участвовать в математической регате, если двое организаторов сказали правду, а один соврал.

Решение: Пусть x – количество команд участвующих в регате. Тогда получим три высказывания: $26 < x < 30, 28 < x < 31, 27 < x < 31$. Первому условию подходят числа: 27, 28, 29. Второму – 29, 30. Третьему – 28, 29, 30.

Если команд 27, то соврали два организатора, что противоречит условию. Если команд 28, то двое сказали правду, и один соврал.

Если команд двадцать девять, то сказали правду все, что противоречит условию. Если команд 30, то два сказали правду, и один соврал.

Ответ: команд 28 или 30.

2 тур (каждая задача 7 баллов) 15 минут

2.1. Расположите на координатной прямой числа R, E, G, A, T. Если известно, что: $R \left(\frac{997}{999} \right)$, $E \left(\frac{2014}{2012} \right)$, $G \left(\frac{33}{35} \right)$, $A \left(\frac{2013}{2015} \right)$, $T \left(\frac{10}{12} \right)$. Ответ обоснуйте.

Решение: Число E – неправильная дробь, оно будет расположено правее всех остальных. У остальных дробей выделим часть, которую им не хватает до 1. У первой - $\left(\frac{2}{999} \right)$, $G \left(\frac{2}{35} \right)$, $A \left(\frac{2}{2015} \right)$, $T \left(\frac{2}{12} \right)$. Больше та дробь, у которой знаменатель меньше. Дроби T не хватает самой большой части до 1, значит оно самое маленькое. Аналогично рассуждая получим, что за ним будет идти G. Потом R и A.

Ответ: T, G, R, A, E.

2.2. Два разведчика договорились встречаться каждый день в одном и том же месте в 12-00. Но у одного из разведчиков сломались часы, поэтому в первый день он пришел в 12-30, на следующий в 13-20, еще через день в 14-30 и, наконец, в 16-00. В какое время придет этот разведчик через 11 дней?

Решение: В первый раз он опоздал на 30 минут, во второй раз - на 30+50 минут, в третий - на 30+50+70 минут, потом на 30+50+70+90 минут, 30+50+70+90+110 минут и т.д. Таким образом, через одиннадцать суммарное время его опоздания составит 1430 минут, что равно 23 часа и 50 минут. Значит, он будет в назначенном месте в 11 часов 50 минут.

2.3. В саду у Ивана Ивановича десять яблонь растут в ряд. Известно, что количество яблок на соседних яблонях отличается на 3. Может ли количество яблок на всех яблонях быть равным 2014?

Решение: Т.к. определить увеличивается на каждом шаге количество яблок или уменьшается, то рассмотрим, как меняется четность.

Если количество ягод на первом кусте четное, то на соседнем кусте будет нечетным. Таким образом, получим 5 четных и 5 нечетных чисел, сумма 5 четных и 5 нечетных равна нечетному числу.

Если количество ягод на первом кусте нечетное, то рассуждая аналогично получаем: 5 четных и 5 нечетных чисел, сумма которых нечетна.

Вывод: Количество ягод может быть только нечетным числом.

3 тур (каждая задача 8 баллов) 20 минут

3.1. Султан Камир Альтан I держит свои драгоценности в трех сундуках. В одном из них – золотые монеты, в другом – алмазы, и в третьем – ювелирные украшения. Султан помнит, что сундук белого цвета левее, чем алмазы, а желтый сундук правее золота. В каком сундуке лежат ювелирные украшения, если синий сундук правее белого и алмазов?

Решение:

Из первого условия ясно, что алмазы не в белом сундуке, а золото не в желтом.

	белый	желтый	синий
Золото	+	-	
Алмазы	-	+	-
Ювелирные украшения	-	-	

Из второго условия, очевидно, что алмазы не в синем сундуке. Значит алмазы в желтом.

Теперь ясно, что синий сундук - крайний правый, а белый - крайний левый. Т.к. желтый сундук правее золота, то золото в белом сундуке. Значит ювелирные украшения – в синем сундуке.

3.2. В магазине продаются конфеты в виде цифр, каждая конфета-цифра имеет свою цену. Число 123 стоит 30 рублей, число 451 – 50 рублей, а число 373832 стоит 90 рублей. Сколько рублей будет стоить число 453783?

Решение: набор чисел 453783 можно получить так: взять набор 451 и набор чисел 373832 и убрать из него цифры 1,2, и 3. Таким образом, стоимость будет равна:

50+

90-30 = 110 рублей.

Ответ: 110 рублей.

3.3. Все натуральные числа от 1 до 100 были выписаны в таком порядке: сначала в порядке возрастания, выписали числа, сумма цифр у которых равна 1, затем в таком же порядке выписали числа, у которых сумма цифр равна 2, и т.д. На каком месте будет стоять число 88?

Решение: Очевидно, что наибольшая из возможных сумм – 18 (сумма цифр числа 99). Значит перед ним стоят числа сумма цифр которых равна 17 и 16. Найдем количество этих чисел. Сумма цифр равная 17 получается, в случае если число равно 98 или 89. Сумма цифр равная 16 - 97, 88, 79. Т.е. числа будут

располагаться следующим образом: 79,88,97,89,98,99. Т.к. всего чисел от 1 до 100 – 100, то число 88 будет стоять на 96 месте.

4 тур (каждая задача 9 баллов) 25 минут

4.1. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько потребуется цифр для нумерации книги число страниц в которой больше на 700?

Решение: Уравнение на число страниц: $9 + 90 \cdot 2 + (x + 1 - 100) \cdot 3 = 1392$. Отсюда $x = 500$. В новой книге будет $500 + 700 = 1200$ страниц. Число цифр для ее нумерации равно $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 201 \cdot 4 = 3693$.

4.2. Игорь, Катя и Алёна записали в тетради по одному числу: 1,2,3 соответственно. Затем каждое из чисел заменили на сумму чисел соседей. Эту операцию они проделывали некоторое количество раз. Могла ли сумма получившихся в итоге трех чисел оказаться равной 5000?

Решение: Предположим, что были записаны числа a , b и c . Тогда после первой операции получим: $b+c$, $a+c$, $a+b$, или $2 \cdot (a+b+c)$. Таким образом, после каждой из описанных операций сумма удваивается. Сумма исходных чисел не делится на 5. Поэтому и сумма чисел, полученных после любого количества операций, на 5 делиться не может.

4.3. Максим и Фёдор живут в одном доме. В каждом подъезде дома по 4 квартиры на этаже. Максим живёт на пятом этаже в 83 квартире, Фёдор - на третьем этаже в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

Решение: Очевидно, что в доме больше чем один подъезд. Максим живет на 21 по счету этаже $83=4 \cdot 20+3$. Федор живет на 43 по счету этаже $169 = 4 \cdot 42+1$. Таким образом, между 83 квартирой и 169 квартирой – 21 этаж. Количество этажей в доме – больше или равно 5. $21-5=16$ этажей было до подъезда Максима. $43-3=40$ – этажей было до подъезда Фёдора. Мы получили, что число этажей в доме должно быть делителем 16 и 40, и больше или равно 5, то из этих условий следует что в доме 8 этажей.