Краевая олимпиада

«Математика в решении мультидисциплинарных задач»

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2015 г. Очный тур. 9 класс

Задание 1. (4 б.)

Известно, что $a-b-c=0$. Найдите значение выражения $a^3-b^3-c^3$.

Решение. Поскольку $a-b-c=0 \Rightarrow a=b+c$, тогда

$$a^3-b^3-c^3=a^3-(b^3+c^3)=a^3-(b+c)(b^2-bc+c^2)=$$

$$=a^3-(b+c)((b+c)^2-3bc)=a^3-a(a^2-3bc)=a^3-a^3+3abc=3abc.$$

Ответ: $3abc$.

Задание 2. (6 б.)

В некотором классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько можно составить вариантов расписания, чтобы предметы естественнонаучного и гуманитарного цикла шли блоками, разделенными физкультурой?

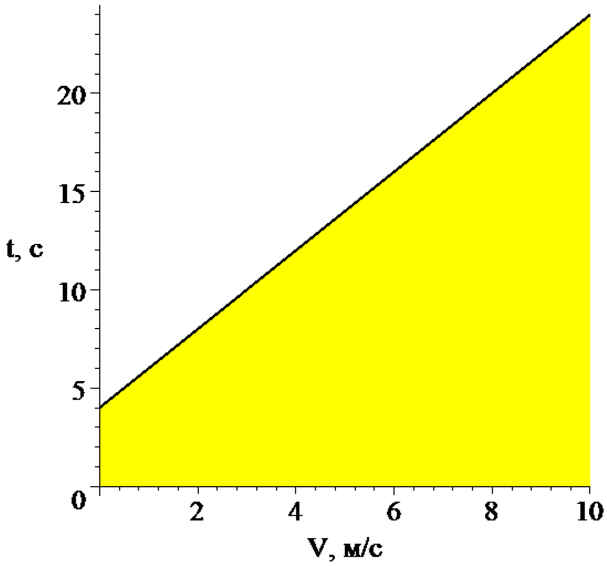
Решение. В каждом блоке по три предмета, т.е. вариантов расположения предметов внутри блока $3!=6$. Физкультура обязательно должна стоять четвертым уроком, а расположение блоков до и после физкультуры может меняться. Итого $2\cdot 3!\cdot 3!=72$ вариантов.

Ответ: 72.

Задание 3. (8 б.)

Материальна точка движется со скоростью $v=2t+4$ м/с. Постройте график скорости точки. Найдите путь, пройденный точкой за первые 10 секунд.

Решение. График скорости имеет вид, представленный на рисунке. Путь можно определить как площадь фигуры, ограниченной графиком скорости, осью абсцисс и прямыми $t=0, t=10$. Это трапеция с основаниями 4 и 24 и высотой 10. Ее площадь $\dfrac{4+24}{2}\cdot 10=140$.



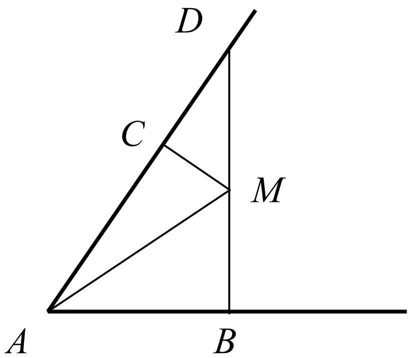
Ответ: 140 м.

Задание 4. (10 б.)

Внутри угла A взяли точку M, которая находится от одной стороны угла на расстоянии 1, а от другой на расстоянии 2. Найдите расстояние AM, если $\angle A = 60^\circ$.

Решение. Продолжим MB до пересечения со стороной угла в точке D. Тогда в прямоугольном ΔABD $\angle K = 30^\circ$. В прямоугольном ΔKMC $KM = CM / \sin 30^\circ = 2$, тогда в ΔABD $AB = \dfrac{KB}{\mathrm{tg} 60^\circ} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и в прямоугольном ΔABM

$$AM = \sqrt{MB^2 + AB^2} = 2\sqrt{\frac{4}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

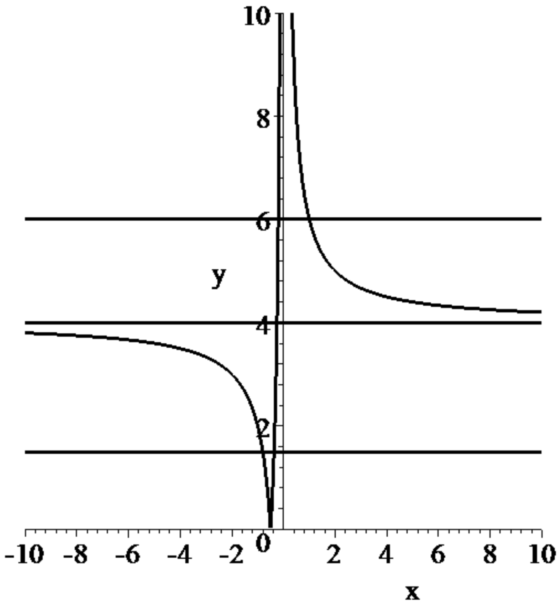


Ответ: $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Задание 5. (10 б.)

При каких значениях параметра a уравнение $\left|\dfrac{2}{x} + 4\right| = a$ имеет ровно 2 корня?

Решение. Построим график функций $y = \left|\frac{2}{x} + 4\right|$ и семейства функций $y = a$ при различных значениях параметра. По рисунку видно, что данные функции имеют две точки пересечения при $a \in (0;4) \cup (4;+\infty)$.



Ответ: $a \in (0;4) \cup (4;+\infty)$.

Задание 6. (12 б.)

Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается полукругом. Периметр окна равен 2 м. Количество пропускаемого окном света пропорционально его площади. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

Решение. Пусть высота окна равна x, а ширина - $2r$. Тогда периметра окна $P = 2x + r + \pi r = 2 \Rightarrow 2x = 2 - r - \pi r$, а площадь

$$S = 2rx + \frac{\pi r^2}{2} = r(2 - r - \pi r) + \frac{\pi r^2}{2} = 2r - r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 2r - \frac{2+\pi}{2} r^2 .$$

Это квадратичная функция, которая имеет максимум в точке $r_{\max} = \frac{2}{2\frac{2+\pi}{2}} = \frac{2}{2+\pi}$, тогда $x_{\max} = 1 - r_{\max}\frac{1+\pi}{2} = 1 - \frac{2}{2+\pi}\frac{1+\pi}{2} = \frac{1}{2+\pi}$. Таким образом, стороны прямоугольника $\frac{4}{2+\pi}$ и $\frac{1}{2+\pi}$.

Ответ: $\frac{4}{2+\pi}$ и $\frac{1}{2+\pi}$.

Краевая олимпиада

«Математика в решении мультидисциплинарных задач»

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2015 г. Очный тур. 10 класс

Задание 1. (4 б.)

Решите уравнение $2x^2-5x-18+\frac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{3-x}}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4+x}}-\frac{7}{\sqrt{12-x-x^2}}=0$.

Решение. Данное уравнение имеет смысл при $\begin{cases}12-x-x^2\geq 0,\\ 4+x\geq 0,\\ 3-x\geq 0,\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-4;3]$

Поскольку $12-x-x^2=(3-x)(x-4)$, приведя последние три слагаемых к общему знаменателю, получаем

$$2x^2-5x-18+\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2-7}{\sqrt{12-x-x^2}}=0,$$

$$2x^2-5x-18+\frac{4+x+3-x-7}{\sqrt{12-x-x^2}}=0,$$

$$2x^2-5x-18=0,$$

$$x_1=4{,}5,\ x_2=-2.$$

Первый корень не входит в область допустимых значений уравнения.

Ответ: -2.

Задание 2. (6 б.) В чемпионате мира по футболу участвует 20 команд. Их необходимо разбить на несколько групп с одинаковым количеством участников для проведения группового турнира по круговой системе (внутри группы каждая команда должно сыграть с каждой только один раз). На сколько групп необходимо разбить команды, чтобы общее количество игр было наименьшим?

Решение. Команды можно разбить либо на 4 группы по 5 команд, либо на 5 групп по 4 команды, либо на 2 группы по 10 команд. В каждом из случаев количество игр равно $4C_5^2=4\frac{5!}{3!2!}=40$, $5C_4^2=5\frac{4!}{2!2!}=30$, $2C_{10}^2=2\frac{10!}{8!2!}=90$. Наименьшее количество игр – 30 при разбиении на 5 группы по 4 команды.

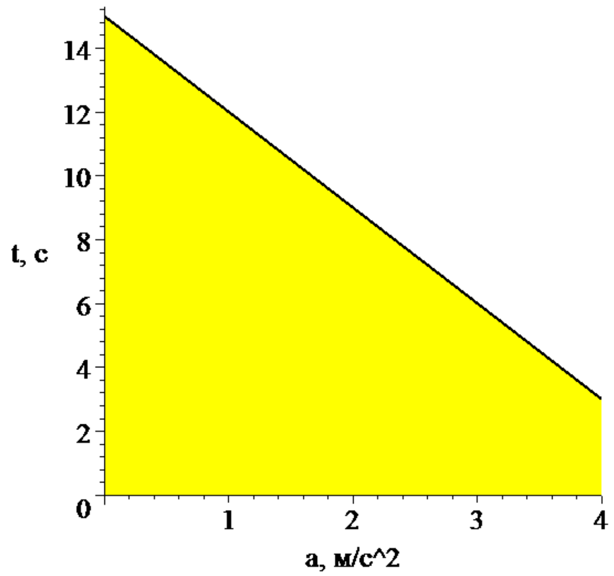
Ответ: 30.

Замечание: вариант, когда участники разбиваются на 10 групп по 2 команды, не соответствует условию проведения турнира по круговой системе. Но поскольку напрямую этого в задаче обговорено не было, при должном обосновании ответ 10 также засчитывался.

Задание 3. (8 б.) Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a=15-3t$ м/с^2. В начальный момент времени скорость точки $v_0=20$ м/с.

Постройте график ускорения. Найдите скорость точки через 4 секунды после начала движения.

Решение. График ускорения имеет вид, представленный на рисунке. Изменение скорости можно определить как площадь фигуры, ограниченной графиком ускорения, осью абсцисс и прямыми $t=0, t=4$. Это трапеция с основаниями 15 и 3 и высотой 4. Ее площадь $\frac{15+3}{2}\cdot 4=36$. Тогда конечная скорость $20+36=56$ м/с.



Ответ: 56 м/с.

Задание 4. (8 б.) Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение. Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2. Приравнивая количество кислоты в первом условии задачи, получаем: $0,3m_1+0,6m_2=0,36(m_1+m_2+10)$. Во втором условии: $0,3m_1+0,6m_2+0,5\cdot 10=0,41(m_1+m_2+10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}0,3m_1+0,6m_2=0,36(m_1+m_2+10),\\ 0,3m_1+0,6m_2+0,5\cdot 10=0,41(m_1+m_2+10),\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0,24m_1-0,06m_2=3,6,\\ 0,11m_1-0,19m_2=0,9,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4m_1-m_2=60,\\ 11m_1-19m_2=90,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m_1=60,\\ m_2=30.\end{cases}$$

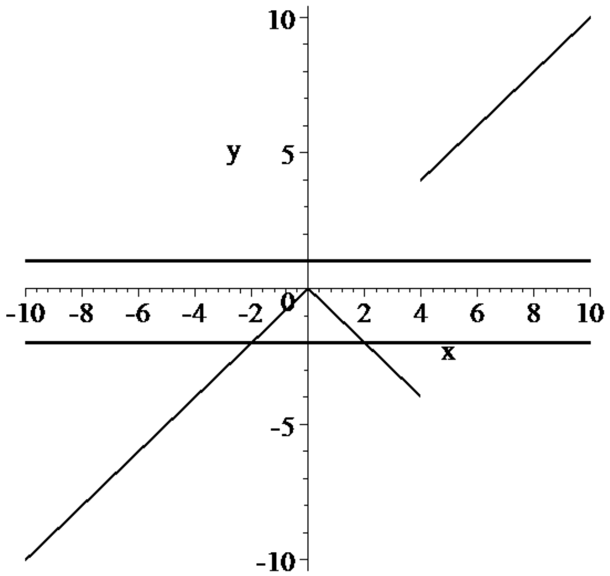
Ответ: 60.

Задание 5. (10 б.) При каких значениях параметра a уравнение $\frac{|x^2-4x|}{x-4}=a$ не имеет корней?

Решение. Построим график функций $y=\dfrac{|x^2-4x|}{x-4}$ и семейства функций $y=a$ при различных значениях параметра. Для этого раскроем модуль:

$$y=\frac{|x^2-4x|}{x-4}=\begin{cases}\dfrac{x(x-4)}{x-4}=x, x\in(-\infty;0]\cup(4;+\infty),\\ \dfrac{-x(x-4)}{x-4}=-x, x\in(0;4).\end{cases}$$

По рисунку видно, что данные функции не имеют точек пересечения при $a\in(0;4]$.



Ответ: $a\in(0;4]$.

Задание 6. (14 б.) Фермер должен засеять 360 гектаров кукурузой и пшеницей. Доход от каждой культуры в хозяйстве фермера является квадратичной функцией вида $y=ax^2+bx$ с аргументом, равным количеству засеянных гектаров. Максимальный доход от кукурузы равен 1 200 тыс. руб., если засеять 200 га. Максимальный доход от пшеницы равен 1 800 тыс. руб., если засеять 300 га. Найдите, сколько гектаров кукурузы и сколько пшеницы дожен засеять фермер для получения максимального дохода?

Решение. Пусть доход от кукурузы определяется функцией $y_к=a_кt^2+b_кt$, а доход от пшеницы - $y_п=a_пz^2+b_пz$. Это квадратичные функции, значит своего максимума они достигают в вершине параболы $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, значит $-\dfrac{b_к}{2a_к}=200$ и $-\dfrac{b_п}{2a_п}=300$. Подставляя эти значения в фунцию, получаем максимальный доход: $1200=a_к200^2+b_к200$ и $1800=a_к300^2+b_к300$. Таким образом, имеем две системы для определения коэффициентов в функциях:

$$\begin{cases} 200a_к + b_к = 6, \\ b_к = -400a_к, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_к = -0,03, \\ b_к = 12, \end{cases} \Rightarrow y_к = -0,03t^2 + 12t.$$

$$\begin{cases} 300a_п + b_п = 6, \\ b_п = -600a_п, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_п = -0,02, \\ b_п = 12, \end{cases} \Rightarrow y_и = -0,02z^2 + 12z.$$

Суммарный доход от двух культур $y = y_к + y_п = -0,03t^2 + 12t - 0,02z^2 + 12z$, при этом по условию $t + z = 360$, тогда $z = 360 - t$ и $y = -0,03t^2 - 0,02(360 - t)^2 + 12(t + z) = -0,05t^2 + 14,4t + 1728$. Это также квадратичная фунция, которая достигает максимума при $t_{\max} = -\dfrac{14,4}{-0,05} = 288$, тогда $z_{\max} = 360 - 288 = 72$. Таким образом, фермер должен засеять 288 га кукурузой и 72 га пшеницей.

Ответ: 288 га кукурузой и 72 га пшеницей

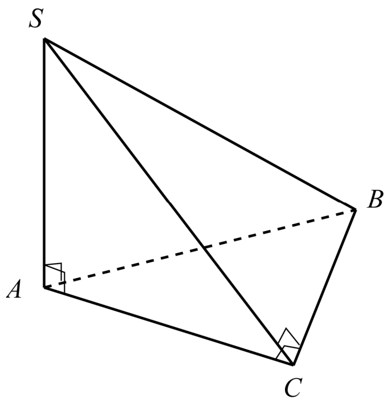
Краевая олимпиада

«Математика в решении мультидисциплинарных задач»

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2015 г. Очный тур. 11 класс

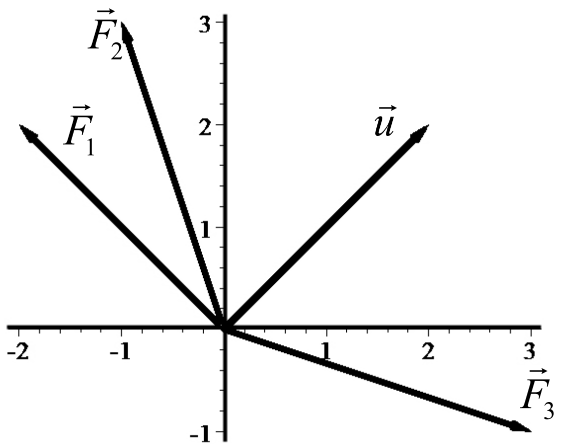
Задание 1. (4 б.) Какое максимальное количество прямоугольных треугольников может содержаться среди граней треугольной пирамиды? Ответ обоснуйте.

Решение. Четыре. В основании пирамиды прямоугольный треугольник ($\angle C$ – прямой), ребро SA, опирающееся на вершину острого угла, перпендикулярно плоскости основания. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BC$. Таким образом, все грани пирамиды являются прямоугольными треугольниками.



Ответ: 4.

Задание 2. (6 б.) На материальную точку действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, изображенная на рисунке. Найдите работу равнодействующей данных сил на перемещении $\vec{u}$ (вектор перемещения приведен на рисунке).



Решение. По рисунку видно, то векторы имеют координаты $\vec{F}_1(-2;2)$, $\vec{F}_2(-1;3)$, $\vec{F}_3(3;-1)$, $\vec{u}(2;2)$. Тогда равнодействующая $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_2$, $\vec{F}(0;4)$. Работу находится как скалярное произведение силы на перемещение $A = \vec{F} \cdot \vec{u} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

Задание 3. (8 б.) Попугайчик Кеша умеет говорить два слова: "Кеша" и "хороший". Если попугайчик говорит несколько слов подряд, то с вероятностью 0,8 следующее слово будет таким же, как предыдущее. Кеша сказал "фразу" из четырех слов, первым из которых было "Кеша". Найдите вероятность того, что последним будет слово "хороший".

Решение. Последние три слова "фразы" могут быть распределены следующим образом: ККХ, КХХ, ХХХ, ХКХ, причем эти события несовместные. Тогда вероятность:

$$P(KKX)+P(KXX)+P(XXX)+P(XKX)=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=$$
$$=0{,}128+0{,}128+0{,}128+0{,}008=0{,}392.$$

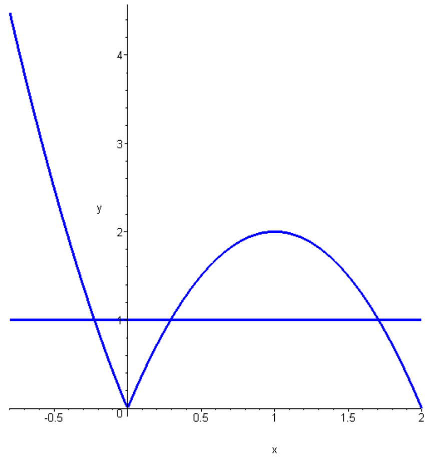
Ответ:0,392.

Задание 4. (10 б.) Найдите все значения параметра $a>0$, при которых уравнение $\lg 2|x|+\lg(2-x)-\lg a=0$ имеет единственный корень.

Решение. Сразу отметим, что по определению логарифмической функции данное выражение имеет смысл только при значениях переменной $x\in(-\infty;0)\cup(0;2)$. Воспользовавшись свойствами логарифмической функции, запишем уравнение, равносильное исходному на указанных выше множествах:

$$\lg\left(2|x|(2-x)\right)=\lg a,$$
$$2|x|(2-x)=a.$$

Построим график функции $y=2|x|(2-x)$ и семейство графиков вида $y=a$.



Для того, чтобы уравнение имело единственное решение, нужно чтобы график левой части пересекался с семейством прямых только в одной точке. Этому условие удовлетворяется, если $a>2$.

Ответ: $a>2$.

Задание 5. (10 б.) Дождевая капля, масса которой равна m_0, падает без начальной скорости под действием силы тяжести (сопротивление воздуха не учитывается). При этом капля испаряется так, что убыль массы пропорциональна времени с коэффициентом пропорциональности k. Через какой промежуток времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

Решение. По условию $m_0 - m = kt \Rightarrow m = m_0 - kt$. Поскольку капля движется под действием силы тяжести без начальной скорости, $V = gt$. Тогда кинетическая энергия $T = \frac{mV^2}{2} = \frac{1}{2}(m_0 - kt)g^2t^2 = \frac{m_0g^2t^2 - kg^2t^3}{2}$ при $t \geq 0$. Исследуем данную функцию на экстремумы, для этого найдем производную $T' = \frac{1}{2}\left(2m_0g^2t - 3kg^2t^2\right) = \frac{g^2t}{2}(2m_0 - 3kt)$. Критические точки $t = 0$ и $t = \frac{2m_0}{3k}$, функция возрастает при $t \in \left(0; \frac{2m_0}{3k}\right)$ и убывает при $t \in \left(\frac{2m_0}{3k}; +\infty\right)$, а значит в точке $t = \frac{2m_0}{3k}$ она имеет максимум.

Ответ: $t = \frac{2m_0}{3k}$.

Задание 6. (12 б.) Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 000 руб., а к концу следующего года 701 000 руб. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 000 руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

Решение. Пусть сумма денег, которые Степан положил в два разных банка, составляет x руб. Коэффициент повышения суммы, обусловленный годовой процентной ставкой на вклад, составляет в первом банке u, во втором v.

Тогда к концу первого года хранения (60% процентов в первом банке и 40% во втором банке) вся сумма вклада $0,6xu + 0,4xv = 590000$ руб. Если бы Степан первоначально положил 60% всей суммы во второй банк, а 40% — в первый банк, то вся сумма была бы равна $0,4xu + 0,6xv = 610000$ руб.

Имеем систему уравнений относительно xu и xv:

$$\begin{cases} 0,6xu + 0,4xv = 590000, \\ 0,4xu + 0,6xv = 610000, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xu + 4xv = 5900\,000, \\ 6xu + 9xv = 9150000, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xv = 650\,000, \\ xu = 550000, \end{cases}$$

откуда $\frac{u}{v} = \frac{11}{13}$

Теперь воспользуемся тем, что к концу второго года сумма вкладов стала 701 000 руб., т.е. $0,6xu^2 + 0,4xv^2 = 701000$. Тогда

$$\begin{cases} 0,6\cdot 550000u+0,4\cdot 650000v=701000, \\ u=\dfrac{11}{13}v, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 330u+260v=701, \\ u=\dfrac{11}{13}v, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 330\cdot 11v+260\cdot 13v=701\cdot 13, \\ u=\dfrac{11}{13}v, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1,3, \\ u=1,1. \end{cases}$$

Тогда искомая сумма

$$0,4xu^2+0,6xv^2=0,4\cdot 550000\cdot 1,1+0,6\cdot 650000\cdot 1,3=749000 \text{ руб.}$$

Ответ: 749 000.