Школьный этап всероссийской олимпиады по математике
2014-2015 уч.год
5 класс

1. На уроке физкультуры мальчики построились в шеренгу. Потом между каждыми двумя мальчиками встала девочка. Всего в шеренге оказалось 25 детей. Сколько мальчиков стояло в шеренге? (3б.)

2. Замените буквы A, B, C, D цифрами так, чтобы получилось верное равенство AAAA + BBB + CC + D = 2014. (3б.)

3. Составьте из шести прямоугольников 7x1, 6x1, 5x1, 4x1, 3x1, 2x1 и квадрата 1x1 прямоугольник, у которого каждая сторона больше 1. (4б.)

4. В 9.00 Юра вышел из дома и пошёл по прямой дороге со скоростью 6 км/ч. Через некоторое время он развернулся и с той же скоростью пошёл домой. В 12.00 Юре оставалось до дома два километра. На каком расстоянии от дома он развернулся? Объясните, как был найден ответ. (5б.)

5. Кот Матроскин прикинул, что он может выложить пол квадратной комнаты квадратной плиткой, и ему не понадобится ни одну из них разрезать. Сначала он положил плитки по краям комнаты, и на это у него ушло 84 плитки. Сколько всего ему надо иметь плиток, чтобы покрыть весь пол? (6б.)

5 класс
Ответы, указания, решения.

1. Ответ. 13.
Решение. Уберем самого правого мальчика. Тогда мальчиков и девочек будет поровну, то есть по 12. Значит, в шеренге стояло 12 + 1 = 13 мальчиков.

2. Ответ. 1111 + 888 + 11 + 4 = 2014.

3. Решение. Из прямоугольника 6x1 и квадрат 1x1 сложим прямоугольник 7x1. Аналогично сложим прямоугольники 7x1 из пар прямоугольников 5x1, 2x1 и 4x1, 3x1. Из четырех полученных прямоугольников 7x1 складывается прямоугольник 7x4.

4. Ответ. На расстоянии 10 км.
Решение. За 3 часа, с 9.00 до 12.00, Юра прошёл 18 км. Если он пройдет еще два километра, то он попадет домой. То есть 18 + 2 = 20 км. – это путь до места разворота и обратно. Значит, он развернулся на расстоянии 20:2 = 10 км от дома.

5. Ответ. 484.
Решение. На каёмке, не считая угловых, лежит 84 – 4 = 80 плиток. Значит, на каждой

стороне лежит 20 плиток, не считая угловых, а вместе с угловыми – 22 плитки. Поэтому общее число плиток равно 484.

Критерии оценивания 5 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

4)

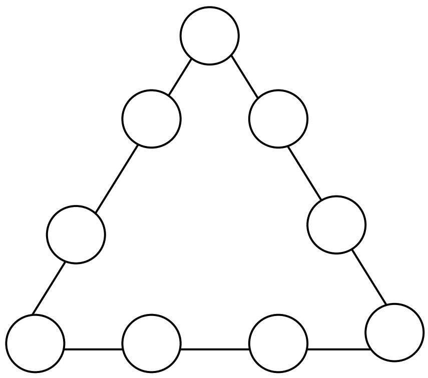
Баллы	Критерии
5	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
4	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
3	Верно рассмотрены отдельные случаи
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Решение не законченно или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике
2014-2015 уч.год
6 класс

1. Даны числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Расставьте их так, чтобы сумма их на каждой стороне треугольника была равна 20. (3б.)



2. Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй – три, в третьей – четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым? (3б.)

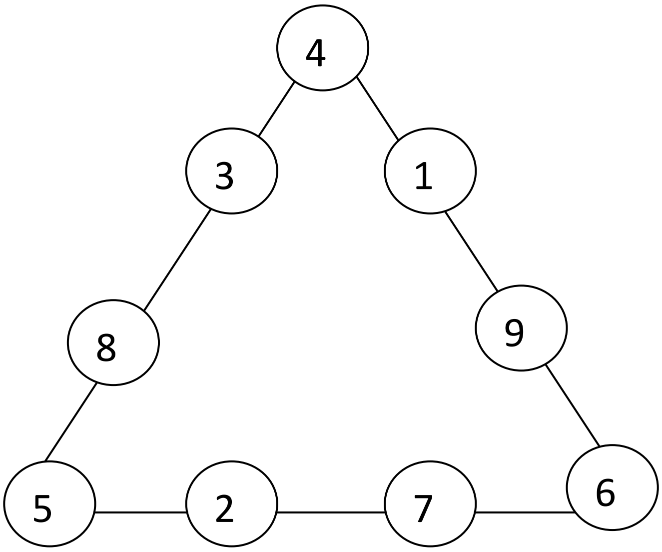
3. Мальчик по чётным числам всегда говорит правду, а по нечётным всегда врёт. Как-то его три ноябрьских дня подряд спрашивали: «Как тебя зовут?». На первый день он ответил: «Андрей», на второй: «Борис», на третий: «Виктор». Как зовут мальчика? Объясните, как вы рассуждали. (4б.)

4. Мышь, мышонок и сыр вместе весят 180г. Мышь весит на 100г больше, чем мышонок и сыр вместе взятые. Сыр весит в три раза меньше, чем мышонок. Сколько весит каждый из них? Ответ нужно подтвердить вычислениями. (5б.)

5. Есть 24 палочки. Длина первой палочки – 1 см, второй – 2 см, …, двадцать четвёртой – 24 см (длина каждой следующей палочки на 1 см больше длины предыдущей). Как, использовав все эти палочки, составить три различных квадрата? Ломать палочки нельзя, каждая палочка должна входить только в один квадрат. (6б.)

Ответы, указания, решения.

1. Возможный вариант:



2. Ответ. Например: 9 + 6; 8 + 5 + 2; 7 + 4 + 3 + 1.
Решение. Суммарный вес гирек равен 45, поэтому в каждой коробочке суммарный вес гирек равняется 15 г.

3. Ответ. Борис.
Решение. Так как мальчик дал три разных ответа, он хотя бы два раза соврал. Поэтому два дня из трёх, когда мальчику задавали вопросы, пришлись на нечётные числа. Поскольку чётные и нечётные числа месяца чередуются, это должны были быть первый и третий дни. Стало быть, второй день пришёлся на чётное число. В этот день мальчик и назвал своё настоящее имя.

4. Ответ. Мышь – 140г, сыр – 10г, мышонок – 30г.
Решение. Из условия следует, что удвоенный вес мыши равен 180 + 100 = 280г. Поэтому вес мыши равен 140г. Тогда мышонок и сыр вместе весят 180 – 140 = 40г. А вес сыра, согласно условию, равен четверти этого веса.

5. Решение. Разобьем палочки на три группы: от 1 до 8, от 9 до 16, от 17 до 24. В каждой группе первую палочку соединим с последней, вторую – с предпоследней, третью – с третьей с конца, оставшиеся две палочки тоже соединим. Получим в каждой группе по четыре одинаковых палки, из которых сложим квадрат. Стороны полученных квадратов: 9, 25, 41.
Замечание. Есть и другие способы сложить три квадрата.

Критерии оценивания 6 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

4)

Баллы	Критерии
5	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
4	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
3	Верно рассмотрены отдельные случаи
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Решение не законченно или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике
2014-2015 уч.год
7 класс

1. Коля, Ваня и Петя собирали грибы. Коля нашел 10 сыроежек и столько белых, сколько подберезовиков нашел Ваня. Ваня нашел лисичек в два раза меньше, чем сыроежек Коля, и 3 подберезовика. Петя нашел только лисички, которых у него было больше, чем белых у Коли, но меньше, чем лисичек у Вани. Сколько грибов собрали ребята? (3б.)

2. С полуночи до полудня Кот Ученый рассказывает сказки, а с полудня до полуночи спит под дубом. На дубе том висит плакат «Два часа назад Кот делал то жу самое, что он будет делать через час». Сколько часов в сутки эта запись верна? (3б.)

3. Петя и Коля копили монеты достоинством в 1, 2, 5 рублей. Оказалось, что в Петиной копилке нет монет того же достоинства, что в Колиной копилке. Могут ли ребята заплатить по 2006 рублей из своих копилок одинаковым числом монет? (4б.)

4. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей? (5б).

5. Можно ли выложить в ряд 30 шариков – белых, синих и красных – так, чтобы среди любых двух идущих подряд шариков был хотя бы один белый, среди любых трёх идущих подряд – хотя бы один синий, а среди любых пяти идущих подряд – хотя бы один красный? Ответ объясните. (6б).

Ответы, указания, решения.

1. Ответ. 25 грибов.
Решение. Коля – 10 сыроежек + 3 белых; Ваня – 5 лисичек и 3 подберезовика, Петя – 4 лисички (меньше 5 и больше 3). Всего грибов: $13 + 8 + 4 = 25$.

2. Ответ. 18 часов.
Решение. До полудня эта запись верна 9 раз (каждые четыре часа), после полудня также, сложив – получаем 18.

3. Ответ. Не могут.
Решение. Предположим, что у Пети пятирублевые монеты. Чтобы набрать 2006 рублей у него в копилке должны быть еще и рублевые, так как 2006 не делится на 5. Значит только пятирублевых монет в копилке быть не может. Не может быть у кого-либо в копилке

только рублевых монет, (их должно быть 2006, у другого будет перебор суммы). Значит у Коли в копилке двухрублевые монеты. Коля отдает 1003 монеты. Петя должен отдать такое же количество монет. Петя не сможет набрать 2006 рублей при помощи 1003 монет достоинством в 1 или 5 рублей, так как нечетное количество (1003) нечетных чисел (1,5) в сумме дают нечетное число, а 2006 – число четное.
250монет×5руб+753монет×1руб=2003 руб (1003 мон) –мало
251монета×5 руб+752монеты×1руб=2007 руб (1003 мон) – перебор.

4. Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: 12 = 6 + 6. Получили искомое количество гвоздей: 19 = 13 + 6.

5. Ответ. Нельзя.
Первое решение. Допустим, можно. Возьмём красный шарик, не лежащий с краю (такой найдётся хотя бы в пятёрке шариков со 2-го по 6-ой). Соседние с ним шарики должны быть белыми, иначе найдутся два соседних шарика, среди которых нет белых. Но это значит, что мы нашли три подряд идущих шарика, среди которых нет синего.
Второе решение.
Разбив 30 шариков на 15 пар соседних шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 15 белых. Разбив их на 10 троек подряд идущих шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 10 синих. Наконец, разбив их же на 6 пятёрок подряд идущих шариков, видим, что среди выложенных шариков не меньше 6 красных. Получается, что шариков должно быть не меньше, чем 15 + 10 + 6 = 31, а их только 30.

Критерии оценивания 7 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки или записан только ответ без решения

4)

Баллы	Критерии
5	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
4	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки

3	Верно рассмотрены отдельные случаи, что может привести к верному ответу
2	Найден путь решения, ответа нет
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Найден путь решения, ответа нет
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике
2014-2015 уч.год
8 класс

1. Как с помощью прямоугольной плитки размером 7см на 9см начертить отрезок длиной 1 см?(3б.)

2. У Васи в кошельке лежало немного денег. Вася положил в кошелек еще 49 рублей, и сумма денег в кошельке увеличилась в 99 раз. Сколь денег стало у Васи в кошельке? (3б.)

3. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов? (4б.)

4. Число a таково, что прямые $y = ax + 1$, $y = x + a$ и $y = 3$ различны и пересекаются в одной точке. Каким может быть a? (5б.)

5. Трое мужчин пришли к парикмахеру. Побрив первого, тот сказал: «Посмотри сколько денег в ящике стола, положи столько же и возьми 2 доллара сдачи». Тоже он сказал второму и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег нет. Сколько было денег в ящике первоначально, если всем удалось совершить задуманное? (6б.)

Ответы, указания, решения.

1. Решение. Четыре раза отложим от точки А на прямой отрезок, равный 7 см, получим отрезок АВ длины 28 см. Теперь на этом же отрезке от его начала А трижды отложим отрезок, равный 9 см. Получим отрезок АС длины 27 см. Тогда отрезок ВС искомый.

2. Ответ. 49 рублей 50 копеек.
Решение. Пусть вначале у Васи было x рублей. Из условия задачи получаем, что $x + 49 = 99x$. Решая это уравнение, получаем $x = 0{,}5$ рубля = 50 копеек.

3. Ответ. 1003.
Решение. Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т. е. среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей, т. е. всего в шеренге не более 1002 + 1 = 1003 рыцарей.
Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

4. Ответ. $a = 2$.

Первое решение. Заметим, что при $x = 1$ выполняется $ax + 1 = x + a = a + 1$, так что точка M $(1; a + 1)$ является общей для прямых $y = ax + 1$ и $y = x + a$. Так как прямые различны, M – их единственная общая точка. Поэтому прямая $y = 3$ тоже должна проходить через неё, откуда $a + 1 = 3$ и $a = 2$. Легко видеть, что при $a = 2$ все три прямые действительно различны.

Второе решение. По условию в точке пересечения $a x + 1 = x + a \Leftrightarrow (a - 1)(x - 1) = 0$, откуда $a = 1$ или $x = 1$. Но случай $a = 1$ невозможен, потому что тогда первые две прямые совпадали бы. Дальше рассуждаем как в первом решении.

5. Решение. После того, как третий положил свои деньги, в столе оказалось 2 доллара. Это означает, что перед тем, как он это сделал, в столе был 1 доллар. Значит, после того, как второй положил деньги, в столе было 3 доллара, а перед тем, как он это сделал, в столе было 1,5 доллара. Рассуждая аналогично для первого, получаем, что перед приходом первого в столе был (1,5+2):2=1,75 долларов.

Ответ: 175 центов.

Критерии оценивания 8 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки или записан только ответ без решения

4)

Баллы	Критерии
5	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
4	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован
3	Получен верный ответ, но решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки

4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Решение не закончено или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике 2014-2015 уч.год 9 класс

1. Числа от 1 до 20 разбили на пары, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих 10 сумм может делиться на 11? (3б.)

2. Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.) (3б.)

3. На доске написаны четыре ненулевых числа, причём сумма любых трёх из них меньше четвёртого числа. Какое наименьшее количество отрицательных чисел может быть написано на доске? (4б.)

4. Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было? (5б.)

5. На сторонах AB и BC параллелограмма ABCD расположены точки N и M соответственно, причём AN: NB = 3: 2, BM: MC = 2: 5. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения OM: OA и ON: OD. (6б.)

Ответы, указания, решения.

1. Ответ. 9.
Решение. Если бы все 10 пар чисел давали суммы, делящиеся на 11, то и сумма всех этих сумм, то есть сумма всех 20 чисел, делилась бы на 11. Однако число $1+2+3+\ldots+20 = 210$ не делится на 11. Значит, таких пар не больше 9.
С другой стороны, пример $2+20 = 3+19 = 4+18 =\ldots=10+12 = 22$ показывает, как получить 9 искомых пар (последняя сумма $1+11$ равна 12 – числу, не делящемуся на 11).
Замечание. Существуют и другие разбиения, в которых суммы в девяти парах делятся на 11.
Замечание. Так как среди чисел от 1 до 20 только 11 делится на 11, то сумма чисел в паре с 11 на 11 делиться не будет. Отсюда сразу следует, что требуемых пар не больше 9.

2. Ответ. 80 м.

Решение: Когда Петя закончил бег, ребята вместе пробежали 4 • 100 - 40 = 360 м. А за 12 секунд они вместе пробежали 288 м. То есть за 12 секунд Петя пробежал 288/360 от 100 метров, то есть 288 : 360 • 100 = 80 метров

3. Ответ. Три.

Решение. Пусть $a \le b \le c \le d$ – данные числа. Из условия следует, что $b+c+d < a$.
Но $a \le b$, значит, $b+c+d < a \le b$, откуда следует, что $c+d \le 0$. Значит, по крайней мере одно из двух самых больших чисел, написанных на доске, отрицательно. Следовательно, отрицательных чисел не меньше трёх.
Пример чисел –5, –4, –3, 1 показывает, что одно из чисел может быть положительным.

4. Решение:
Так как десяток было четыре, то на оставшиеся 6 выстрелов приходится 50 очков. Поскольку стрелок попадал лишь в семёрку, восьмёрку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семёрку, восьмёрку и девятку) он наберёт 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела ему нужно набрать 26 очков, что возможно при единственной комбинации $8+9+9=26$. Итак, в семёрку стрелок попал 1 раз, в восьмёрку – 2 раза, в девятку – 3 раза.
Ответ: в семёрку стрелок попал 1 раз, в восьмёрку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

5. Решение:
Продолжим DN до пересечения с прямой BC в точке T. Положим BM = 2a, CM = 5a. Из подобия треугольников TNB и DNA (коэффициент 2/3) находим, что

$$TB=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}\cdot 7a=\frac{14}{3}a,$$

а из подобия треугольников TOM и DOA —

$$\frac{OM}{OA}=\frac{TM}{AD}=\frac{\frac{14}{3}a+2a}{7a}=\frac{20}{21}.$$

Продолжим AM до пересечения с прямой CD в точке K.

Аналогично находим, что $\frac{ON}{OD}=\frac{6}{35}$.
Ответ: 20:21; 6:35

Критерии оценивания 9 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении получен верный ответ, полное обоснование
2	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован
1	Записан верный ответ без решения

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении получен верный ответ, полное обоснование
2	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован
1	Ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении приведено полное доказательство, рассмотрены оба случая знака выражения (а+в)
3	Приведено полное доказательство только для случая (а+в)≥0. Случай, когда (а+в)<0 не рассмотрен
2	Ход доказательства правильный, но недостаточно обоснован
1	Доказательство неверное, но есть некоторые подвижки

4)

Баллы	Критерии
5	В представленном решении получен верный ответ, полное обоснование
4	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован
3	Ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении получены оба верных ответа, полное обоснование
5	В представленном решении получены оба верных ответа, но они недостаточно обоснованы
4	Рассмотрен только один случай, получен верный ответ, решение полностью обосновано
3	Ход решения верный, но допущены вычислительные ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике 2014-2015 уч.год 10 класс

1. Петя купил 2 книги. Первая на 50 % дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой? (3б.)

2. Имеется 30 бревен длинами 3 и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаны длиной 1 м? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.) (3б.)

3. Сто первых натуральных чисел в каком-то порядке записали в ряд и вычислили 98 сумм, получаемых при сложении троек подряд идущих чисел. Какое наибольшее число нечетных сумм могло получиться? (4б.)

4. Дан треугольник ABC, в котором AB=BC, AB≠AC. На стороне AB выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что ∟BDC=∟ECA. Докажите, что площади треугольников DEC и ABC равны. (5б.)

5. Какое наименьшее число круглых фишек диаметром $\sqrt{2}$ можно расставить на доске размером 7×7 клеток так, чтобы внутри каждой клетки хотя бы одна точка была накрыта некоторой фишкой? (Длина стороны клетки равна 1.) (6б.)

Ответы, указания, решения.

1. Ответ: $33\frac{1}{3}\%$

2. Ответ. 70.

Первое решение. Склеим все бревна в одно 100-метровое бревно. Чтобы его разделить на 100 частей, нужно сделать 99 распилов, из которых 29 уже было сделано.

Второе решение. Если было m трехметровых и n четырехметровых бревен, то $m + n = 30$, $3m + 4n = 100$, откуда $m = 20$, $n = 10$. Поэтому нужно сделать $20\cdot 2 + 10\cdot 3 = 70$ распилов.

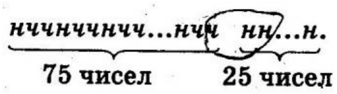
3. Ответ: 97 сумм

Решение:

Сначала покажем, что все суммы не могут быть нечетными. Действительно, пусть все суммы нечетны. Это возможно только, если числа идут в следующем порядке: а) нннн…; б) нчч нччн…; в) чнччнчч…; г) ччнччнч… .

В первом случае получаем, что все числа от 1 до 100 должны быть нечетны, а в остальных – что четных чисел больше, чем нечетных, т. е. приходим к пртиворечию.

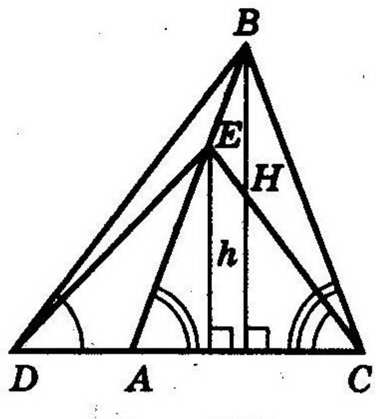
Покажем теперь, как расставить числа, чтобы получилось 97 нечетных сумм:



Четной окажется только 75-я сумма.

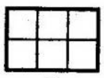
4. Решение:

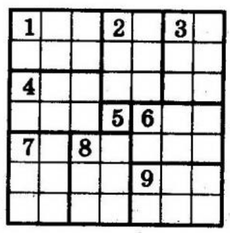
Треугольники AEC и BDC подобны, так как $\angle ECA = \angle BDC$ и $\angle EAC = \angle DCB$. Пусть h и H – длины перпендикуляров, опущенных из точек E и B на прямую AC. Тогда в силу подобия указанных треугольников имеем $\frac{h}{AC}=\frac{H}{DC}$. Значит, $\frac{1}{2}h*DC=\frac{1}{2}H*AC$, т. е. $S_{\Delta DEC} = S_{\Delta ABC}$.



5. Ответ: 9 фишек.

Решение:





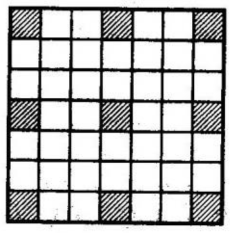


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Очевидно, что одну фишку можно поставить так, что она накроет точки каждой клетки фигуры, изображенной на рисунке 1. Поэтому, как показано на рисунке 2, достаточно 9 фишек.

Меньшим количеством фишек обойтись нельзя. Рассмотрим 9 клеток, омеченных на рисунке 3.

Эти клетки удалены друг от друга на расстояние, не меньшее , чем 2, поэтому одна фишка не может задевать две клетки одновременно. Следовательно, фишек должно быть не меньше, чем отмеченных клеток.

Критерии оценивания 10 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ

2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть некоторые подвижки

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или решение содержит ошибки
2	Рассмотрены частные случаи решения
1	В решении есть некоторые подвижки или записан только ответ без решения

4)

Баллы	Критерии
5	Представленное доказательство полностью обоснованно
4	Представленное доказательство не достаточно обоснованно
3	Решение содержит ошибки
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Решение не законченно или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

11 класс
Ответы, указания, решения.

1. Ответ: 2178
Обозначим искомое число за $1000a + 100b + 10c + d$. По условию задачи имеем:

$$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a.$$

Так как левая часть — число четное, то и правая часть — число четное, поэтому a — четная цифра. Тогда $a = 2$, так как в других случаях получим в левой части пятизначное число. Так как $4 \cdot d$ оканчивается на 2, то $d = 8$. В итоге имеем:

$$4(1000 \cdot 2 + 100b + 10c + 8) = 1000 \cdot 8 + 100c + 10b + 2.$$

Тогда $4(10b + c) + 3 = 10c + b$ или $40b + 4c + 3 = 10c + b$. После упрощения получим: $13b + 1 = 2c$. Решением данного уравнения будут: $b = 1$, $c = 7$. Тогда искомое число будет 2178.

2. Ответ. 0.
Решение. Среди сомножителей есть разность $\sin 45° - \cos 45°$, равная 0, поэтому произведение равно 0.

3. Ответ: $\frac{\pi}{25}$

Исходами данного события являются все возможные отмечаемые точки, лежащие внутри квадрата со стороной 10 см; все исходы считаются равновозможными, но количество их бесконечно велико. Событиями в таком эксперименте являются попадания отличаемой точки внутрь некоторой фигуры конечной площади, целиком лежащей внутри квадрата. Вероятности таких событий находятся по формуле геометрической вероятности.

Найдем вероятность события А – «точка попадет в круг радиусом 2 см, лежащий внутри квадрата». Площадь круга равна $S_{кр}= \pi r^2=4\pi$ (см^2). Площадь квадрата $S_{кв}=a^2=100$(см^2). $P(A)=\frac{S_{кр}}{S_{кв}}=\frac{4\pi}{100}=\frac{\pi}{25}$

4. Ответ. Не может.

Первое решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел является чётным числом, так как содержит ровно 50 нечётных слагаемых. А сумма 98 последовательных натуральных чисел является нечётным числом, так как содержит ровно 49 нечетных слагаемых. Поэтому эти суммы оканчиваются на цифры разной чётности.

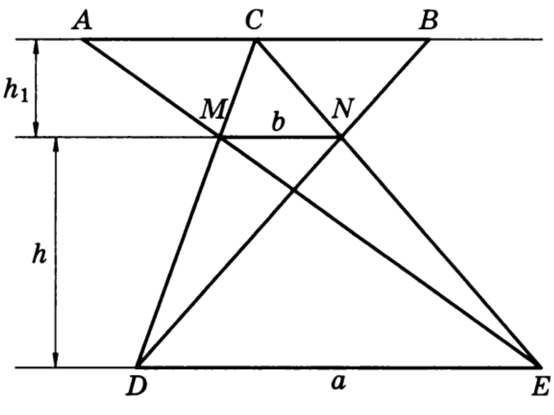
Второе решение. Заметим, что сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчивается на 0, а сумма никаких двух подряд идущих чисел на 0 не оканчивается. Значит, не заканчивается на 0 и сумма никаких 98 подряд идущих чисел.

5. Ответ: $\frac{2ab}{a-b}$

5. Пусть $DMNE$ — данная трапеция, а AB — искомый отрезок (см. рис. 86). Тогда $\triangle DME$ и $\triangle CMA$; $\triangle DNE$ и $\triangle BNC$; $\triangle MNE$ и $\triangle ACE$ являются подобными; поэтому

$$\frac{AC}{a}=\frac{h_1}{h}; \qquad \frac{CB}{a}=\frac{h_1}{h}; \qquad \frac{AC}{b}=\frac{h_1+h}{h}.$$

Из первых двух равенств следует, что $AC = CB$; а из первого и третьего — что $AC = \frac{ab}{a-b}$. Так как $AB = AC + CB$ и $AC = CB$ получим: $AB = \frac{2ab}{a-b}$ (если $a > b$).



Критерии оценивания 11 класс

Максимальное количество баллов – 21

1)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

2)

Баллы	Критерии
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
2	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
1	В решении есть ошибка, что привело к неверному ответу

3)

Баллы	Критерии
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
3	Решение недостаточно обоснованно
2	Решение не доведено до конца
1	В решении есть некоторые подвижки

4)

Баллы	Критерии
5	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
4	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
2	Решение не законченно или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

5)

Баллы	Критерии
6	В представленном решении обоснованно получен верный ответ
5	Получен верный ответ, но он не достаточно обоснован или решение содержит ошибки
4	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к верному ответу
3	Рассмотрены частные случаи решения, что может привести к неверному ответу
2	Решение не законченно или приводит к неверному ответу
1	В решении есть некоторые подвижки

Школьный этап всероссийской олимпиады по математике
2014-2015 уч.год
11 класс

1. Найти четырехзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. (3б.)

2. Найдите произведение
$(\sin 0° - \cos 0°)(\sin 1° - \cos 1°)\ldots(\sin 89° - \cos 89°)(\sin 90° - \cos 90°)$. (3б.)

3. Внутри квадрата со стороной 10 см выделен круг радиусом 2 см. Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг? (4б.)

4. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел? (5б.)

5. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти отрезок её, ограниченный продолжениями диагоналей, если основания равны a и b. (6б.)