Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике в 2015-2016 учебном году
10 класс
Время решения – 240 минут (4 часа)

1. Вычислите $(1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+2015\cdot 2017)-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+2015^2\right)$.

Ответ: 4062240. *Решение.*

$(1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+2015\cdot 2017)-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+2015^2\right)=$

$=\left(1\cdot(1+2)+2\cdot(2+2)+3\cdot(3+2)+\ldots+2015\cdot(2015+2)\right)-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+2015^2\right)=$

$=\left(1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+2015\cdot 2015+2\cdot(1+2+3+\ldots+2015)\right)-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+2015^2\right)=$

$=2\cdot(1+2+3+\ldots+2015)=2\cdot\dfrac{2015\cdot 2016}{2}=2015\cdot 2016=4062240.$

Критерии оценки.
Арифметическая ошибка, не влияющая на общий правильный ход вычислений (например, при подсчете суммы арифметической прогрессии), – 6 баллов.

2. Накануне своего Дня рождения в 2015 году Дима обнаружил удивительный факт: если умножить число (номер дня) его рождения на номер месяца его рождения и на количество лет, которое ему исполняется, то получится год его рождения. Дима родился в XXI веке. Определите все возможные даты его рождения.
Ответ: 22.июля 2002 г. или 14 ноября 2002 г.
Решение. Пусть в 2015 году Диме исполняется x лет. Обозначим через d число дня, а через m – номер месяца его рождения. Из условия задачи получаем следующее уравнение: $(d\cdot m+1)\cdot x=2015=5\cdot 13\cdot 31$. Диме меньше 15 лет (т.к. он родился в XXI веке), и больше 5 (т.к. произведение числа дня и номера месяца рождения не больше
$31\cdot 12=372$). Значит, Диме в этом году 13 лет и он родился в 2002 году. Тогда $d\cdot m=154=2\cdot 7\cdot 11$. Отсюда получаем два варианта, соответствующие дню и месяцу рождения: $154=14\cdot 11$, т.е. 14 ноября, и $154=22\cdot 7$, т.е 22 июля.
Критерии оценки.
Потерян один ответ – 4 балла.
Решение перебором годов и перебор неполный – не более 3 баллов.

3. Две окружности ω_1 и ω_2 одинакового радиуса R пересекаются и расположены так, что центр одной окружности находится вне другой. Обозначим центр окружности ω_1 буквой O_1, а окружности ω_2 буквой O_2. Пусть B – одна из двух точек пересечения окружностей. Оказалось, что прямая O_1B пересекает вторично окружность ω_2 в точке C такой, что O_2C и O_1O_2 перпендикулярны. Найдите расстояние между центрами окружностей.
Ответ: $R\sqrt{3}$.
Решение 1. Пусть $\angle O_2O_1C=\alpha$. Тогда $\angle O_2O_1B=\alpha$ и $\angle O_1O_2B=\alpha$ (поскольку $O_1B=O_2B$). Следовательно, $\angle BO_2C=90^\circ-\alpha=\angle BCO_2$. Значит, $O_2B=BC=R$, т.е. в прямоугольном треугольнике O_1O_2C катет $O_2C=R$, а гипотенуза $O_1C=2R$. Следовательно, катет $O_1O_2=R\sqrt{3}$.
Решение 2. Обозначим вторую точку пересечения окружностей буквой A. Окружности симметричны относительно прямой AB. Обозначим буквой D точку пересечения AB и O_1O_2. В силу симметрии AB и O_1O_2 перпендикулярны, $O_1D=DO_2$, и значит, DB – средняя линия треугольника O_1O_2C. Следовательно, $DB=O_2C/2=R/2$. По теореме Пифагора $O_1D^2=O_1B^2-DB^2=R^2-R^2/4=3R^2/4$, поэтому $O_1O_2=2O_1D=2\left(R\sqrt{3}/2\right)=R\sqrt{3}$.
Критерии оценки.
Установлено, что $O_1C=2R$ – 3 балла.
Установлено, что DB (см. решение 2) есть средняя линия треугольника O_1O_2C, – 2 балла.

4. Известно, что сумма чисел a, b и c равна 1. Докажите, что $ab+bc+ca \le 1/3$.

Решение. Из очевидного неравенства $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$, раскрыв скобки, получаем $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$, откуда $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 3ab+3bc+3ca$ или $(a+b+c)^2 \ge 3ab+3bc+3ca$. С учетом условия задачи, получаем требуемое неравенство.

Критерии оценки.

Предъявленное решение годится только для неотрицательных a, b и c – 3 балла.

5. Доска 7×7 имеет шахматную раскраску. За один ход можно выбрать любой прямоугольник $m\times n$ клеток и перекрасить все его клетки в противоположные цвета (чтобы черные клетки стали белыми, белые – черными). За какое минимальное число ходов можно сделать доску одноцветной?

Ответ: за 6 ходов.

Решение. Рассмотрим отрезки длины, равной стороне клетки, разделяющие пары клеток, граничащие со стороной доски. Вдоль каждой из сторон доски таких отрезков 6, всего $6\cdot 4=24$. Каждый из отрезков разделяет клетки, которые в начальный момент имеют разные цвета, следовательно, каждый отрезок должен оказаться на стороне хотя бы одного из выбираемых прямоугольников. Нетрудно убедиться, что на сторонах одного прямоугольника могут лежать не более четырех из рассматриваемых отрезков. Таким образом, чтобы доска стала одноцветной, потребуется не менее $24:4=6$ ходов. Остается показать, что шести ходов достаточно. Выберем 6 прямоугольников размера 1×6, покрывающие клетки второй, четвертой и шестой горизонталей и второй, четвертой и шестой диагоналей.

Критерии оценки.

Только ответ – 0 баллов.

Пример перекрашивания за 6 ходов без оценки минимальности – 2 балла.

Доказательство минимальности без примера – 5 баллов.