Математика, 10 класс, муниципальный этап
Время выполнения – 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Прямая дорога проходит недалеко от горы Фудзияма. Водитель автомобиля заметил гору в 60 км к северу, а через час – в 45 км к западу. На каком наименьшем расстоянии от Фудзиямы проехал автомобиль?

2. Для каких n можно расположить шашки в клетках доски $n \times n$ (в каждой клетке – не более одной шашки) так, чтобы в любых двух столбцах шашек было поровну, а в любых двух строках – не поровну?

3. Найдите наименьшее 2011-значное число такое, что десятичная запись числа втрое большего него содержит лишь четные цифры.

4. Докажите, что проекция окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, на гипотенузу видна из вершины прямого угла под углом 45°.

5. В футбольном турнире участвует $N>2$ команд. Каждая команда должна сыграть с каждой один раз. Капитаны договорились, что каждая команда в своей K-ой игре забивает K голов. Каково наименьшее количество ничьих может оказаться в таком турнире?

Математика, 10 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

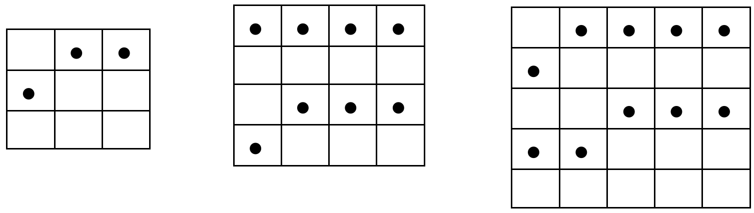
1. **Ответ:** 36 км.
Решение: Гора и точки наблюдения находятся в вершинах прямоугольного треугольника с катетами 60 и 45. Гипотенуза при этом равна 75. Приравнивая по-разному подсчитанные площади треугольника, получаем, что произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту, равную искомому расстоянию.
Отсюда, 60 * 45 = 75 * x.

Критерии оценки. *Только ответ – 1 балл. Ответ с рисунком прямоугольного треугольника и высотой – 2 балла.*

2. **Ответ:** для любых больших 1.

Решение: Разобьём строки по парам и занумеруем пары числами от 1 до $\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

Одна строка может оказаться без пары. В первую строку каждой пары поставим по n фишек. В непарную строку ничего не ставим.



Если n нечётно, то в паре с номером k сдвинем k фишек из первой во вторую строку, оставляя их в тех же столбцах. Если n чётно, то в паре с номером k сдвинем k – 1 фишку. Для примера результат таких действий приведён для $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$.
Легко видеть, что в столбцах шашек останется поровну, а в строках – нет.
Критерии оценки. *Только ответ не оценивается. Пример расстановки только для чётных n – 2 балла. Только для нечётных n – 2 балла.*

3. **Ответ:** 133...334 (всего 2009 троек).
Решение: Утроенное число равно 400...02 (всего 2009 нулей). Меньшего произведения (а, значит, и исходного числа) получить невозможно. Действительно, если на первом месте число 2, то исходное число не 2011-значное. Указанное число – наименьшее с первой цифрой равной 4, делящееся на 3.
Критерии оценки. *Ответ без обоснования – 2 балла.*

4. **Доказательство:** Пусть A – вершина прямого угла, O – центр вписанной окружности ω. m и n – касательные к ω, перпендикулярные гипотенузе, пересекающие её в точках M и N соответственно. Обозначим через P и Q – точки касания ω с катетами, R – точка касания ω с гипотенузой, S и T – точка касания ω с m и n. Легко показать, что $APOQ$, $OSMR$ $ORNT$ – квадраты со стороной равной радиусу ω. Расстояние от O до точек M, N и A равны (диагонали одинаковых квадратов) т.е. O – центр описанной около треугольника MNA окружности. Центральный угол MON этой окружности – прямой (составлен из двух углов в 45°). Значит, опирающийся на ту же дугу вписанный угол MAN равен 45°. Ч.т.д.

5. **Ответ:** 2.
Решение: Первая и последняя игры турнира обязательно закончатся вничью. Одна со счетом 1:1, другая – $(N-1):(N-1)$. Докажем, что других ничьих может не быть. Индукция по N. База индукции при $N = 3$ очевидна. Предположим, что N команд могут сыграть турнир ровно с двумя ничьими. Пусть в турнире участвуют $N + 1$ команда. Пусть команда С отдыхает пока остальные N команд играют с двумя ничьими. Последнюю ничью отменяем. Пусть она случилась в игре между А и Б. Пусть теперь С играет с А и проигрывает. Теперь А играет с Б и выигрывает, далее С играет со всеми остальными и проигрывает всем, кроме последней (вторая ничья).
Критерии оценки. *Ответ без обоснования не оценивается. Ответ с 2-3 примерами – 1 балл.*