Математика, 11 класс, муниципальный этап
Время выполнения – 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Какое наибольшее количество решений может иметь уравнение $\left|\left|\left|\left|x+a\right|+b\right|+c\right|+d\right|=e$?

2. Существуют ли четыре натуральных числа, разность любых двух из которых является целой степенью двойки?

3. В треугольнике ABC сторона $AB > AC$. AD – биссектриса. Точка E на стороне AB такая, что ED перпендикулярна BC. Точка F на стороне AC такая, что DE – биссектриса угла BEF. Докажите, что $\angle FDC = \angle BAD$.

4. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники, у каждого из которых отметили одну сторону. Докажите, что сумма длин всех отмеченных сторон не может быть меньше 1.

5. В стране 1509 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причём по дорогам можно доехать из любого города до любого другого. Оказалось, что какие бы две дороги, исходящие из одного города, ни закрыть на ремонт, вышеуказанное свойство нарушится (не из каждого города можно будет по дорогам проехать до любого другого). Какое наибольшее число дорог может быть в стране?

Математика, 11 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Ответ:** 16.
Решение: После раскрытия модулей выражение становится равным $\pm(x+a)\pm b\pm c\pm d=e$. При различных комбинациях плюсов и минусов можно получить 2^4 = 16 разных линейных уравнений, каждое из которых может иметь не более одного

решения. Пример, когда решений ровно 16: $||||x-16|-8|-4|-2|=1$. Решениями являются все нечётные числа от 1 до 31. Ответ можно получить, последовательно строя графики модулей начиная с самого внутреннего.
Критерии оценки. *Ответ с примером без обоснования – 2 балла.*

2. **Ответ:** нет.
Решение: Рассмотрим три числа с указанным свойством, идущие в порядке возрастания: $a<b<c$. По условию, $b-a=2^k, c-b=2^m, c-a=2^k+2^m=2^n$. Если $k<m$, то $2^k+2^m<2^{m+1}$. Аналогично, для $k>m$. Итак, $k=m$. По этим же соображениям, четвёртое по величине число должно отличаться от предыдущего на эту же степень двойки. Но тогда, первое, второе и четвёртое число не удовлетворяют выведенному условию.
Критерии оценки. *Ответ без обоснования не оценивается. Ответ, основанный на примере трёх чисел с пояснением, что четвёртого числа не подобрать, – 1 балл.*

3. **Доказательство:** Точка D лежит на биссектрисе $\angle A$, значит, она равноудалена от прямых AB и AC. Но она лежит и на биссектрисе $\angle BEF$, т.е. равноудалена от прямых AB и EF. Таким образом, она лежит и на биссектрисе $\angle EFC$. Обозначим $\angle A$ за 2α, а $\angle B$ за β. $\angle BED$ = 90º – β. $\angle AEF$ = 180º – 2(90º – β) = 2β. $\angle EFA$ = 180º – 2α – 2β.
$\angle DFC$ равен половине внешнего угла треугольника EFA, т.е. α + β. $\angle$C = 180º – 2α – β. В треугольнике $\angle FDC$=180º – (180º – 2α – β) – (α + β) = α. Ч.т.д.

4. **Доказательство:** Обозначим через a_1, a_2,… a_n длины отмеченных сторон прямоугольников, а через b_1, b_2,… b_n длины соответствующих неотмеченных сторон. Площадь квадрата $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=1$, но каждое из b_i не больше 1, отсюда $a_1+a_2+...+a_n\ge 1$. Возможны и другие решения.

5. **Ответ:** 2011.
Решение: Докажем следующее свойство рассматриваемого графа: в нём нет циклов, имеющих общую точку. Предположим, что два цикла: A и B пересекаются. Тогда существует их общая вершина, из которой выходят два ребра, причём, одно принадлежит циклу A, а другое – B. Если такой вершины нет, то двигаясь вдоль одного из циклов, мы убедимся, что все его рёбра принадлежат и другому циклу, т.е. циклы A и B совпадают. Удалим эти два ребра по очереди. Граф остаётся связным, т.к. удаление ребра из цикла не приводит к потере связности. Свойство доказано. Построим новый граф, в котором вершинами являются циклы исходного графа или отдельные вершины, если они не входят ни в один из циклов. В новом графе циклов нет, значит, это дерево. Общее количество рёбер в исходном графе равно количеству рёбер в этом дереве плюс количество рёбер в циклах. Если бы циклов не было, то рёбер было бы на одно меньше, чем вершин. Каждый цикл добавляет к этому количеству одно ребро. Чем больше циклов, тем больше рёбер. Каждый цикл содержит хотя бы три вершины, т.е. циклов не больше чем 1509:3 = 503. Следовательно, всего рёбер не больше 1508 + 503 = 2011. Пример такого графа приводится легко: 503 треугольника, связанные в цепочку рёбрами.
Критерии оценки. *Утверждение, что циклы в графе не пересекаются, оценивать в 2 балла. Количество ребер в дереве считать известным.*