Математика, 8 класс, муниципальный этап
Время выполнения – 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. AD – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB>BD$.

2. Студент за 5 лет учения сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем, а на пятом курсе сдал втрое больше экзаменов, чем на первом курсе. Сколько экзаменов он сдал на четвертом курсе?

3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел целая. Сумма всех чисел таблицы равна 11. Докажите, что в какой-то клетке стоит число, не меньшее $\frac{3}{5}$.

4. Какое наименьшее число подряд идущих натуральных чисел, меньших 1000, надо взять, чтобы их произведение делилось на любое натуральное число меньшее 1000?

5. На десяти клетках доски 4×4 стоят фишки. Если в каком-то квадрате 2×2 стоит одна фишка, её можно снять с доски. Докажите, что такими действиями нельзя снять все фишки.

Математика, 8 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

Каждая задача оценивается в 7 баллов *в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Доказательство:** $\angle ADB$ – внешний для треугольника ADC, значит, $\angle ADB>\angle DAC$. Но $\angle DAC=\angle DAB$. Итак, $\angle ADB>\angle DAB$. Но против большего угла в треугольнике ADB лежит большая сторона. Ч.т.д.
Возможны другие решения, опирающиеся на материал более старших классов.

2. **Ответ:** 8.

Решение: Пусть a, b, c, d, e – количество экзаменов, сданных в каждом из годов обучения. По условию, $a + b + c + d + e = 31$, $a < b < c < d < e$.
Заменим в равенстве числа b, c, d, e на заведомо не большие.
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + 3a < 31$. Получаем, $7a < 25$. Заменив эти же числа на заведомо не меньшие, получим $a + (3a – 3) + (3a – 2) + (3a – 1) + 3a > 31$.
Получаем, $13a > 37$. Отсюда, $a = 3$. При этом $e = 9$, $b + c + d = 19$.
Если $d < 8$, то эта сумма не больше $5 + 6 + 7 = 18$. Подходят числа 5, 6, 8.
Критерии оценки. *Только ответ не оценивается. Ответ с примером всех пяти чисел – 2 балла.*

3. **Доказательство:** В какой-то из строк сумма не меньше трёх, иначе общая суммы была бы не больше 10. В этой строке есть число не меньшее $\frac{3}{5}$, иначе сумма в ней была бы меньше трёх.

4. **Ответ:** 496.
Решение: Простые числа, большие 500, но меньшие 1000 должны входить в произведение, иначе произведение не будет на них делиться. Наименьшее из таких чисел 503, а наибольшее 997. Значит, надо взять все числа от 503 до 997 включительно. Но также надо взять одно из чисел: 499 и 998, иначе произведение не будет делится на 499. При этом, к выбранным нами числам надо будет добавить только одно число – 998. Итак, выбрано 496 чисел.
Покажем, что больше чисел не требуется. Среди 496 подряд идущих чисел встречаются все остатки (включая нулевой) от деления на любое число, не превосходящее 496, значит, какой-то сомножитель, а с ним и произведение делится на любое число меньшее 497. Числа от 497 до 499 являются делителями удвоенных этих же чисел, которые присутствуют среди выбранных. Остаются числа: 500, 501, 502, 999.
Каждое из этих чисел можно разложить на произведение взаимно простых множителей:
500 = 4*125, 501 = 3*167, 502 = 2*251, 999 = 27*37.
На все эти множители, как было показано выше, наше произведение делится. Учитывая взаимную простоту, делится и на их произведение.
Критерии оценки. *Только ответ не оценивается. Указание, что числа 503 и 997 должны быть выбраны – 2 балла. Проверка чисел от 500 до 502 – ещё 1 балл. Проверку простоты чисел 503 и 997 можно не требовать. Без учёта взаимной простоты множителей проверку не засчитывать.*

5. **Доказательство:** Всего квадратов 2×2 на доске 9 штук. Одним квадратом мы можем воспользоваться для снятия фишки не более одного раза, т.е. более 9 фишек снять не удастся.