Математика, 9 класс, муниципальный этап
Время выполнения – 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

1. Расставьте числа от 1 до 8 в вершинах куба, чтобы сумма чисел на каждой грани была одинаковой.

2. Какое наибольшее количество общих точек график функции $y = |||x+a|+b|+c|+d$ может иметь с осью абсцисс?

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$ и ca делится на $5b$. Какое наименьшее значение может иметь произведение abc?

4. P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, точки A_1, B_1, C_1 – проекции P на стороны BC, AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle B_1A_1C_1$ – острый.

5. Какое наименьшее количество коней могут бить все белые клетки шахматной доски?

Математика, 9 класс, муниципальный этап

Решения и указания по проверке

***Каждая задача оценивается в 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. **Пример:** числа на нижней и верхней гранях:

6	3
4	5

1	8
7	2

2. **Ответ:** 8.

Решение: Выясним, сколько решений может иметь уравнение $\left|\left|\left|x+a\right|+b\right|+c\right|+d=0$. После раскрытия модулей выражение становится равным $\pm(x+a)\pm b\pm c+d=0$. При различных комбинациях плюсов и минусов можно получить 2^3=8 разных линейных уравнений, каждое из которых может иметь не более одного решения. Пример, когда решений ровно 8: $\left|\left|\left|x-8\right|-4\right|-2\right|-1=0$. Решениями являются все нечётные числа от 1 до 15. Ответ можно получить, последовательно строя графики модулей начиная с самого внутреннего.
Критерии оценки. *Ответ с примером без обоснования – 2 балла.*

3. **Ответ:** 900.

Решение: Запишем условие по-другому. $\frac{ab}{c}=2m$, $\frac{bc}{a}=3n$, $\frac{ca}{b}=5k$. Перемножим первые два равенства. Получим, что b^2 делится на 2 и на 3. Но, значит, и b делится на 2 и на 3, т.е. b не меньше 6. Перемножив другие пары равенств, получим, что c не меньше 15, а a не меньше 10. Именно эти значения подходят к условиям задачи.
Критерии оценки. *Только ответ не оценивается. Ответ с примером и проверкой – 2 балла.*

4. **Доказательство:** Треугольники B_1PA_1, A_1PC_1 и B_1PC_1 – равнобедренные, т.к. P равноудалена от сторон треугольника ABC. Обозначим углы при их основаниях через α, β, γ. Сумма углов треугольника $B_1A_1C_1$ равна $2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$. Отсюда, $\alpha+\beta+\gamma=90°$. $\angle B_1A_1C_1$ равен $\beta+\gamma<90°$. Ч.т.д.

5. **Ответ:** 7.
Решение: Отметим на доске точками несколько белых клеток (см. рис.) Пять клеток в правом нижнем углу могут быть побиты не менее чем тремя конями, т.к. один конь может бить не более двух из них. Каждая из оставшихся отмеченных клеток должна быть побита своим конём. Итак, всего коней не менее семи. Пример расстановки семи коней, бьющих все белые клетки, приведён на том же рисунке. ***Критерии оценки.*** *Только пример расстановки – 2 балла. Только доказательство, что коней не менее семи, - 3 балла.*

●						●	
	●						
	к		к		к		
	к				к		
					●		●
●			к		к	●	
					●		●

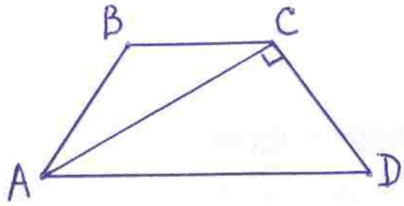
1. **Ответ**: 9504950325.
Решение: Чтобы десятизначное число было наибольшим, надо, чтобы старший разряд был наибольший. Это возможно при М = 9. Но цифры 9 нет в полученном числе, значит, она стёрта. Буква А не может быть больше 5, иначе, она должна быть стёрта, и число окажется менее чем шестизначное. Значит, чтобы число начиналось на максимально возможные две цифры, они должны быть 95… Между первой и второй пятёркой осталось две цифры 0 и 4 (и две буквы: Т и Е). Значит, число начинается цифрами: 950495… Вторая буква Т (цифра 0) стёрта. А последние две стёртые буквы (И и К) должны быть равны последним оставшимся цифрам (3 и 2).
Указания по проверке. *Только ответ – 3 балла.*

2. **Ответ:** Нет.
Решение: Зачеркнём строки и столбцы, в которых находятся числа 4 и 8. Остались невычеркнутыми, по крайней мере, одна строка и один столбец. Две оставшиеся чётные цифры (2 и 6) не могут одновременно стоять и в строке и в столбце, поэтому в одной из невычекнутых линий будет стоять не более одной из этих цифр, и произведение цифр в ней делиться на 4 не будет.
Указания по проверке. *Только ответ не оценивается. Чаще всего будут встречаться решения, в которых будут слова: «Пусть 8 стоит там-то, а четыре – там-то…». Такие слова должны быть подкреплены, например, возможностью перестановок строк (и столбцов), иначе, они ничего не стоят. Кроме того, в таком решении возможен случай пропуска случая, когда 4 и 8 стоят в одной строке (столбце). Нестрогие рассуждения оценивать не выше 2 баллов.*

3. **Ответ**: 46.
Решение: Рассмотрим участок A-B-C-D: $AD \geq 17$, $BD \leq 12$, отсюда $AB \geq 5$.
Тогда $AK = 56 = AB + BE + EH + HK \geq 5 + 17 + 17 + 17 = 56$.
Если $AB > 5$, то $56 > 56$, что невозможно.
Значит, $AB = 5$, откуда $GJ = 17$, $JK = 5$.
Тогда $BJ = 46$.
Указания по проверке. *Только ответ – 1 балл. Отдельные полезные выводы, не доведённые до конца, можно оценить в 1 – 2 балла.*

4. **Доказательство:** $\dfrac{a+b}{a-b} = 1 + \dfrac{2b}{a-b}$. Отсюда, $2b$ делится на $a - b$. a и b взаимно просты, значит, $a - b$ и b тоже взаимно просты. Следовательно, 2 делится на $a - b$.
Значит, либо $a - b = 1$, либо $a - b = 2$.
Выразив из этих равенств b и подставив в выражения из условия,
получим в первом случае $4ab + 1 = 4a(a-1) + 1 = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$
и во втором случае: $ab + 1 = a(a-2) + 1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$.
Указания по проверке. *Если при обосновании того, что либо a – b = 1, либо a – b = 2 не используется взаимная простота, снимать 3 балла. Если потерян один случай, то ставить не выше 2 баллов.*

5. **Ответ**: 2.
Решение: Пусть указанный четырёхугольник представлен на рисунке. Если бы угол ACD был не прямым, то площадь треугольника ACD можно было бы увеличить, повернув сторону CD относительно точки C. Аналогично, угол ABD тоже прямой. Оказывается, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный в окружность с



центром в середине AD. Точки B и C разбивают полуокружность на три равных дуги, откуда, вписанный угол ADC равен 60 градусов. Отсюда, $AD = 2CD = 2$.

Указания по проверке. *Только ответ не оценивается.*