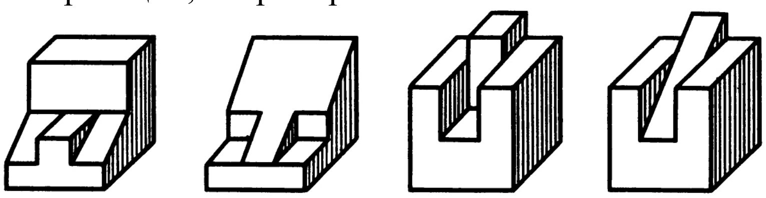
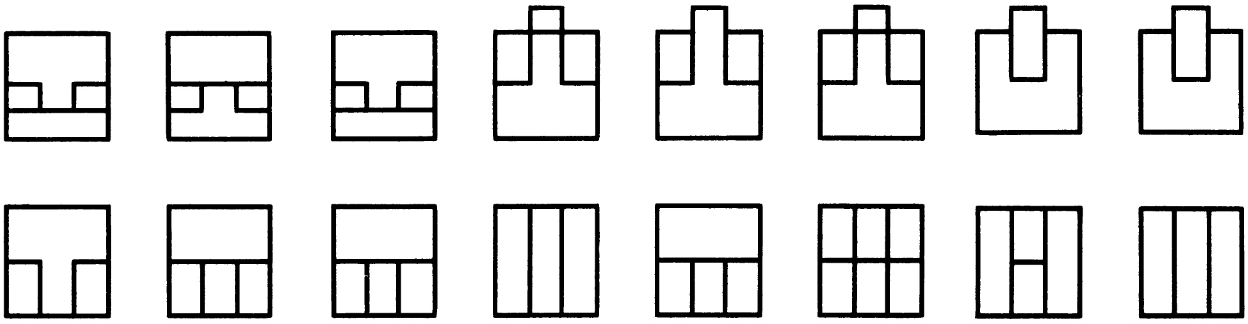
Краевая олимпиада
«Математика в решении мультидисциплинарных задач»
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2016 г. Очный тур. 9-10 классы

Задание 1. (4 б.) На рисунке изображены четыре детали и восемь пар прямоугольных проекций. Найдите среди приведенных проекции, соответствующие деталям 1-4. В ответ запишите пары деталь – проекции, например: 1-а.





Ответ: 1-б, 2-а, 3-ж, 4-з.

Задание 2. (6 б.) До кризиса фонд зарплаты учителей составлял 68% от всего бюджета школы. Во время кризиса бюджет школы уменьшился на 15%. На сколько процентов следует увеличить фонд зарплаты учителей, чтобы общие расходы на зарплату учителей в рублях остались прежними?

Решение: Пусть x – весь бюджет школы до кризиса, тогда $0,85x$ – бюджет школы после кризиса. После кризиса фонд зарплаты учителей составляет $\frac{0,68x}{0,85x}100\% = 80\%$ от всего бюджета школы. Значит, фонд зарплаты учителей следует увеличить на 80-68=12%.

Ответ: 12%.

Задание 3. (8 б.) Имеются два сплава золота и серебра. В одном из них количество этих металлов находится в соотношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Из этих сплавов необходимо отлить новый сплав так, чтобы золото и серебро содержались бы в нем в весовом соотношении 5:11. В каком отношении надо взять данные сплавы?

Решение: Пусть имеется x кг. первого сплава и y кг. второго, тогда в новом сплаве золота будет $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y$ кг., а серебра – $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y$ кг. Тогда эти величины должны относиться как $\left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y\right) : \left(\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y\right) = 5:11$ или $\frac{4x+3y}{6x+7y} = \frac{5}{11}$, откуда $44x + 33y = 30x + 35y$, $14x = 2y$, $x : y = 1:7$.

Ответ: 1:7.

Задание 4. (10 б.) В школьном турнире по волейболу каждая команда встречается с каждой по одному разу. После того, как к числу участников добавилась одна команда, количество встреч увеличилось на 20%. Сколько команд участвовало в первенстве после добавления команды?

Решение: Круговой турнир для n команд состоит $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ из игр, для $n+1$ команд – из игр $C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда $C_{n+1}^2 = 1,2C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 1,2\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 11$. После добавления одной команды в первенстве участвовало 12 команд.

Ответ: 12.

Задание 5. (10 б.) Петя и три его одноклассника стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 12 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 288 метров. А когда Петя закончил бег, остальным трём участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 40 метров. Сколько метров пробежал Петя за 12 секунд? Известно, что скорость каждого мальчика была постоянной на протяжении всей дистанции.

Решение: Пусть x – скорость Пети, а V – сумма скоростей остальных трех ребят. Тогда $12(V+x)=288$. Петя закончил забег через $\frac{100}{x}$ с, за это время остальные участники успели пробежать $\frac{100}{x}V$, тогда из их суммарной дистанции осталось $100\cdot 3-\frac{100}{x}V=40$ м. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 12(V+x)=288, \\ \frac{100}{x}V=260, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V+x=24, \\ 13x-5V=0, \end{cases} \Leftrightarrow 18x=120 \Leftrightarrow 12x=12\frac{120}{18}=80.$$

Ответ: 80 м.

Задание 6. (12 б.) В компании друзей из $n \geq 4$ человек у каждого появилась своя новость. За один телефонный разговор каждый из друзей рассказывает своему собеседнику все новости, известные ему на данный момент. Докажите, что за $2n-4$ разговоров все друзья из компании могут узнать все новости.

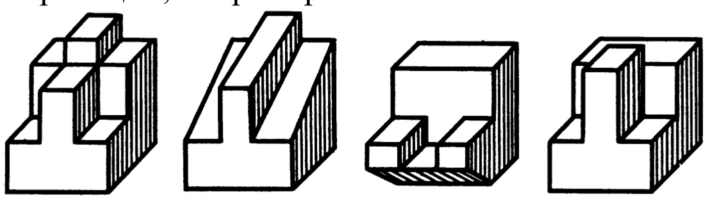
Решение: Воспользуемся методом математической индукции.

Проверим утверждение при $n=4$. Пусть первый разговор состоялся между друзьями 1-2, тогда каждый из них знает новости 1 и 2. Второй разговор между друзьями 3-4, тогда каждый из них знает новости 3 и 4. Тогда если третий и четвертый разговоры состоятся между друзьями 1-3 и 2-4, то все новости будут известны всем 4 друзьям. Таким образом, понадобилось $2n-4=2\cdot 4-4=4$ разговоров и утверждение верно.

Пусть имеется алгоритм обмена новостями для группы из k друзей, обеспечивающий распространение новостей за $2k-4$ разговоров. Добавим к группе нового участника *A*, который знает новость a. Тогда нужно, чтобы первый разговор прошел между некоторым участником группы (назовем его *B*) и новым участником *A*. После этого разговора *B* станет обладателем новостей ab, тогда за $2k-4$ новость a станет известна всем друзьям, но *A* еще не будет знать новостей остальных участников группы. Для того, чтобы ими поделиться, достаточно одного разговора между *A* и любым участником группы. То есть при добавлении в группу нового $k+1$-го друга количество разговоров увеличится на два и составит $2k-4+2=2(k+1)-4$. Что и требовалось доказать.

Краевая олимпиада
«Математика в решении мультидисциплинарных задач»
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2016 г. Очный тур. 11 класс

Задание 1. (4 б.) На рисунке изображены четыре детали и восемь пар прямоугольных проекций. Найдите среди приведенных проекции, соответствующие деталям 1-4. В ответ запишите пары деталь – проекции, например: 1-а.



1 2 3 4

а б в г д е ж з

Ответ: 1-е, 2-г, 3-в, 4-д.

Задание 2. (6 б.) Вода, содержащая после ее использования на производстве 6% примесей, поступает на очистку. После очистки ее часть, содержащая 2% примесей, возвращается на производство, а остальная часть с 52% примесей сливается в отстойник. Какой процент воды, поступающий на очистку, сливается в отстойник?

Решение: Пусть x – первоначальное количество воды с примесями, тогда чистой воды без примесей в этом количестве – $0,94x$. Пусть y – часть воды, сливаемой после очистки в отстойник. Тогда в той части, что сливается в отстойник, $0,48xy$ чистой воды, а в части, поступающей на производство, $0,98x(1-y)$ чистой воды. Тогда

$$0,94x = 0,48xy + 0,98x(1-y) \Leftrightarrow 0,94 = 0,48y + 0,98 - 0,98y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{0,98-0,94}{0,98-0,48} = \frac{4}{50} = 0,08.$$

Ответ: 8%.

Задание 3. (8 б.) В городке N на пост губернатора претендуют два кандидата. На выборах за первого проголосовала 1/14 часть избирателей, за второго – 3/4, против всех кандидатов – 1/10 и недействительных оказалось не более 3000 бюллетеней. Какое наибольшее число избирателей могло принимать участие в выборах?

Решение: Пусть x – число избирателей. Тогда число недействительных бюллетеней

$$x - \frac{1}{14}x - \frac{3}{4}x - \frac{1}{10}x = \frac{11}{140}x \le 3000.$$

Поскольку число бюллетеней целое и 11 и 140 являются взаимно простыми числами, значит x должно быть кратно 140. Обозначим $x = 140k, k \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{11}{140}x = 11k \le 3000 \Leftrightarrow k \le 272\frac{8}{11}$, откуда $k = 272$, а значит $x = 38080$.

Ответ: 38 080.

Задание 4. (10 б.) В шахматном турнире среди всех участников было две женщины. Каждый участник турнира сыграл с остальными по две партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего партий было сыграно в турнире?

Решение: Пусть x – количество мужчин. Тогда между собой мужчины сыграли $2C_x^2$ партий, а с женщинами – $4x$ партий. Тогда можно составить уравнение $2C_x^2 = 4x + 66$,

$x(x-1)=4x+66$, $x^2-5x-66=0$, откуда $x\in\{-6;11\}$. Значит, в турнире участвовало 11 мужчин, всего 13 человек. Общее количество партий $2C_{13}^2=156$.

Ответ: 156.

Задание 5. (10 б.) Три фирмы A, B и C являются учредителями трех акционерных обществ. Учредителями первого общества α являются только фирмы A и B, причем они делят пакет акций в отношении 5:1, второго общества β – фирмы B и C с соотношением пакета акций 8:7, третьего общества γ – фирмы A и C с соотношением 7:2. Возможно ли из акционерных обществ α,β,γ создать новую компанию, такую что доли акций фирм A, B и C имели бы в ней соотношение 4:3:3? Если это возможно, то в каком отношении должны быть сформированы пакеты акций обществ α,β,γ?

Решение: Составим таблицу, описывающую участие фирм в имеющихся обществах:

	A	B	C	сумма
α	$5x$	x		$6x$
β		$8y$	$7y$	$15y$
γ	$7z$		$2z$	$9z$
сумма	$5x+7z$	$x+8y$	$7y+2z$	

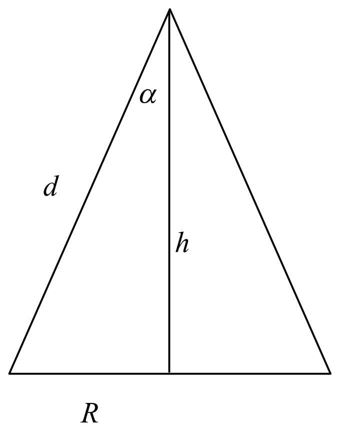
Чтобы в новой компании соотношения акций обществ α,β,γ было 4:3:3, должны выполняться условия:

$$\begin{cases}\dfrac{5x+7z}{x+8y}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{x+8y}{7y+2z}=\dfrac{3}{3},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x-32y+21z=0,\\ x+y-2z=0,\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z.$$

Суммарное отношение долей обществ α,β,γ составляет $6x:15y:9z$ или $6x:15x:9x$ или $2:5:3$. Значит, создание компании с требуемым соотношением возможно и участие в ней обществ α,β,γ составляет 2:5:3

Ответ: 2:5:3.

Задание 6. (12 б.) Для освещения круговой площадки радиуса R используется один фонарь. Степень освещенности каждой точки площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света. На какой высоте над центром площадки необходимо повесить фонарь, чтобы наилучшим образом осветить дорожку, которая идет по окружности площадки?



Решение: Пусть I – степень освещенности точки, находящейся на расстоянии d от фонаря, тогда по условию $I=k\dfrac{\cos\alpha}{d^2}$, где k – коэффициент пропорциональности. Расстояние от фонаря до любой точки окружности $d = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, тогда $I(\alpha) = k\dfrac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{R^2} = \dfrac{k}{R^2}\left(\cos\alpha - \cos^3\alpha\right)$, причем $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, необходимо найти наибольшее значение функции $I(\alpha)$ на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Исследуем функцию с помощью первой производной: $I'(\alpha) = \dfrac{k}{R^2}\left(-\sin\alpha - 3\cos^2\alpha(-\sin\alpha)\right) = \dfrac{k}{R^2}\sin\alpha(3\cos^2\alpha - 1)$. На промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ максимум достигается при $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и в этой точке будет наибольшее значение функции.

Высота фонаря равна $\dfrac{R}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{R}{\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

<u>Ответ:</u> $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.