Решения задач краевой Политехническая олимпиада для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Очный этап. 9 кл.

Задание 1. (6 б.)

Решить уравнение в целых числах $3x^2+2xy-y^2=4$.

Решение. Разложим многочлен в левой части на множители:

$$3x^2+2xy-y^2=2x(x+y)+(x-y)(x+y)=(x+y)(3x-y),$$

$$(x+y)(3x-y)=4$$

Приведем все возможные значения множителей и переменных в таблице, учитывая, что переменные должны быть целыми:

$x+y$	1	-1	2	-2	4	-4
$3x-y$	4	-4	2	-2	1	-1
$x=\dfrac{(x+y)+(3x-y)}{4}$	5/4	-5/4	1	-1	5/4	-5/4
$y=(x+y)-x$	-	-	1	-1	-	-

Таким образом, условию задачи удовлетворяют пары чисел $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Ответ: $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Задание 2. (10 б.)

Поезд первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза больше, чем вторую половину пути. Известно, что средняя скорость поезда на всем пути равна 45 км/час. Каковы скорости поезда на первой и второй половинах пути?

Решение. Пусть v_1 – скорость поезда на первой половине пути, v_2 – скорость на второй половине пути, тогда найдем время, за которое поезд пройдет первую и вторую половину пути:

$$t_1=\frac{s/2}{v_1},\ t_2=\frac{s/2}{v_2}$$

Средняя скорость на всём пути равна:

$$v_{cp}=\frac{s}{t_1+t_2}=\frac{s}{\frac{s/2}{v_1}+\frac{s/2}{v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

По условию, $v_{cp}=45\,км/ч,\ v_1=1.5v_2$

Тогда получаем уравнение:

$$\frac{2(1.5v_2)v_2}{1.5v_2+v_2}=45,$$

решая которое, получаем: $v_1=56.25\,км/ч,\quad v_2=37.5\,км/ч.$

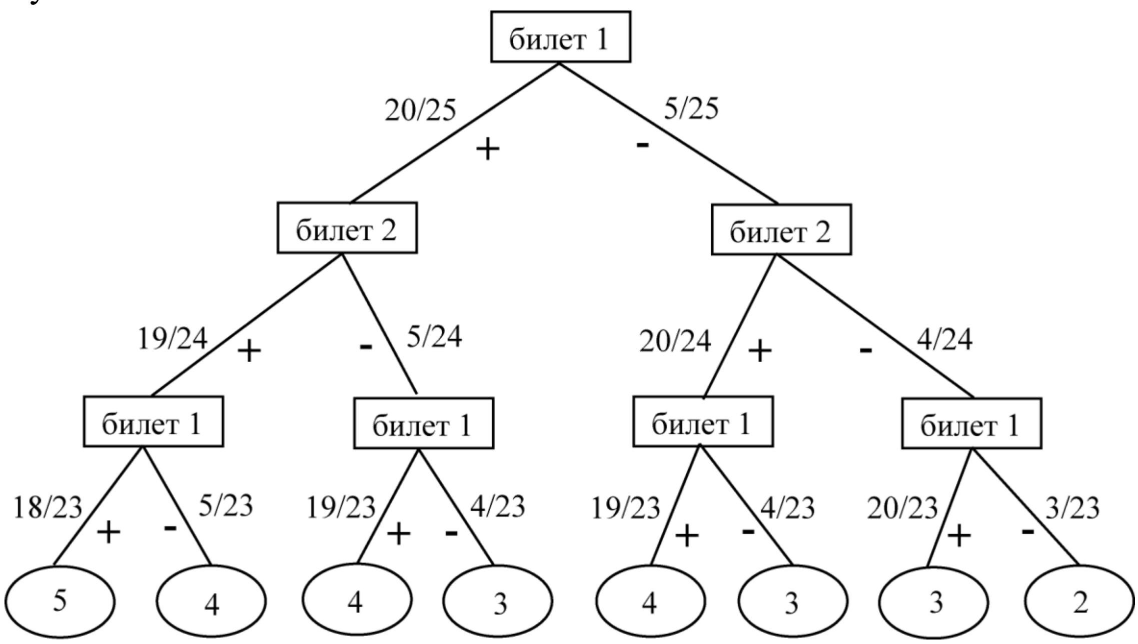
Ответ: $v_1=56.25\,км/ч,\quad v_2=37.5\,км/ч.$

Примечание: в связи с опечаткой в условии задачи, при проверке засчитывались как верные все решения, содержащие правильные размышления о расчете средней скорости.

Задание 3. (12 б.)

При подготовке к экзамену ученик выучил 20 из 25 вопросов. На экзамене он вытянул билет из трех вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставиться, если учащийся правильно отвечает только на один вопрос билета, «хорошо» – на два, «отлично» – на все три. Какую оценку этот ученик получит с наибольшей вероятностью? Найдите эту вероятность.

Решение. Изобразим граф. Плюсами и минусами обозначено, знает ученик выбранный билет, или нет. В последних вершинах графа стоит оценка, которую получит ученик.



Глядя на такой граф удобно подсчитать вероятность получения каждой из оценок:

$$P(5)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}\approx 0,496,$$

$$P(4)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{23}+\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{19}{23}\approx 0,413,$$

$$P(3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{4}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{20}{23}\approx 0,087,$$

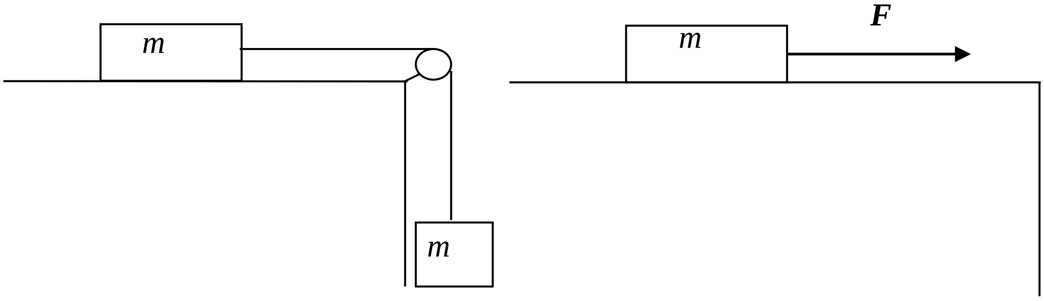
$$P(2)=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{3}{23}\approx 0,004.$$

Таким образом, наиболее вероятной является оценка "отлично".

Ответ: наиболее вероятная оценка – отлично, ее вероятность составляет $\frac{57}{115}\approx 0,496$.

Задание 4. (12 б.)

Брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности и приводится в движение различными способами. В первом случае, с помощь невесомой нерастяжимой нитью, к которой привязан груз массой m. Во втором, с помощь горизонтальной силы $F = mg$. В каком случае ускорение бруска больше и во сколько раз?



Решение. Пусть a_1 и a_2 - ускорения бруска в первом и втором случае. Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси. В первом случае (T - сила натяжения нити):

$$\begin{cases} T = ma_1, \\ mg - T = ma_1, \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = \frac{g}{2}.$$

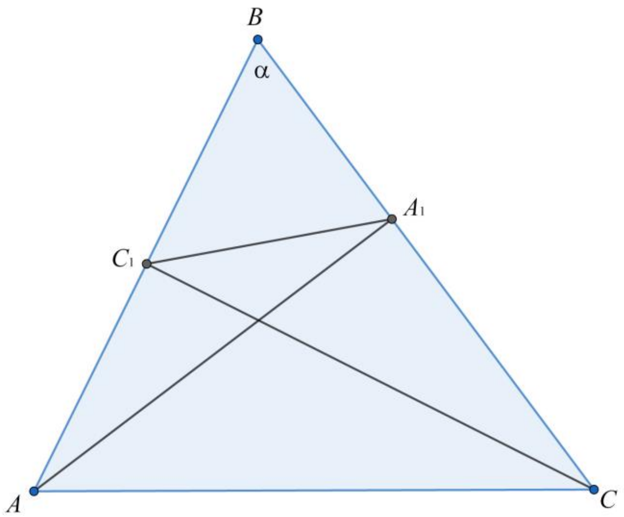
Во втором: $ma_2 = F = mg \Leftrightarrow a_2 = g$. Значит ускорение бруска во втором случае больше в два раза.

Ответ: во втором случае ускорение больше в два раза.

Задание 5. (14 б.)

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, при этом $AC = 5$, $A_1C_1 = 3$. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Решение. Треугольники ABC и A_1C_1B подобны с коэффициентом $k = |\cos\alpha|$ по свойству высот треугольника, тогда $|\cos\alpha| = k = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{3}{5}$. Следовательно $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ (стороны прямоугольного треугольника составляют пифагорову тройку) и по теореме синусов в $\triangle ABC$: $R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{25}{8}$.



Ответ: $\frac{25}{8} = 3{,}125$.

Задание 6. (16 б.)

Две лампы мощностью 40 Вт и 60 Вт, рассчитанные на одинаковое напряжение, включены в сеть с тем же напряжением последовательно. Вычислить, какая мощность в этой цепи потребляется каждой лампой.

Решение: Мощность находится по формуле $P = \frac{U^2}{R}$, отсюда сопротивление каждой из ламп $R_1 = \frac{U^2}{P_1}$, $R_2 = \frac{U^2}{P_2}$ (*). При последовательном соединении силу тока рассчитывается по формуле $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{P_1 P_2}{U(P_1 + P_2)}$ (**). Мощность, потребляемая каждой лампы в этой цепи: $P' = I^2 R$. Подставляя значения (*) и (**), получаем:

$$P_1' = I^2 R_1 = \frac{P_1^2 P_2^2}{U^2 (P_1 + P_2)^2} \cdot \frac{U^2}{P_1} = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 14,4 \text{ Вт},$$

$$P_2' = I^2 R_2 = \frac{P_1^2 P_2^2}{U^2 (P_1 + P_2)^2} \cdot \frac{U^2}{P_2} = \frac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = 9,6 \text{ Вт}.$$

Ответ: 14, 4 Вт и 9,6 Вт.

Решения задач краевой Политехническая олимпиада для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Очный этап. 10 кл.

Задание 1. (8 б.)

Свободно падающее без начальной скорости тело за последнюю секунду падения прошло 1/3 своего пути. Найти время падения и высоту, с которой упало тело.

Решение. Пусть h – вся высота, с которой падает тело, t – общее время падения. Тогда выполняется следующее равенство:

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

По условию задачи за (t–1) секунду тело прошло 2/3 высоты, значит:

$$\frac{2}{3}h = \frac{g\left(t-1\right)^2}{2},$$

Тогда получаем:

$$\frac{2}{3}\frac{gt^2}{2} = \frac{g\left(t-1\right)^2}{2} \Leftrightarrow t^2 - 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3-\sqrt{6} < 1, \\ t_2 = 3+\sqrt{6} \approx 5,45. \end{array}\right.$$

Первый корень не удовлетворяет условию задачи. Найдем высоту:

$$h = 5\left(3+\sqrt{6}\right)^2 \approx 148,5\,м.$$

Ответ: $3+\sqrt{6} \approx 5,45$ с и $5\left(3+\sqrt{6}\right)^2 \approx 148,5$ м.

Задание 2. (8 б.)

Решить уравнение в целых числах $3x^2 + 2xy - y^2 = 4$.

Решение. Разложим многочлен в левой части на множители:

$$3x^2 + 2xy - y^2 = 2x(x+y) + (x-y)(x+y) = (x+y)(3x-y),$$

$$(x+y)(3x-y) = 4$$

Приведем все возможные значения множителей и переменных в таблице, учитывая, что переменные должны быть целыми:

$x+y$	1	-1	2	-2	4	-4
$3x-y$	4	-4	2	-2	1	-1
$x = \frac{(x+y)+(3x-y)}{4}$	5/4	-5/4	1	-1	5/4	-5/4
$y = (x+y) - x$	-	-	1	-1	-	-

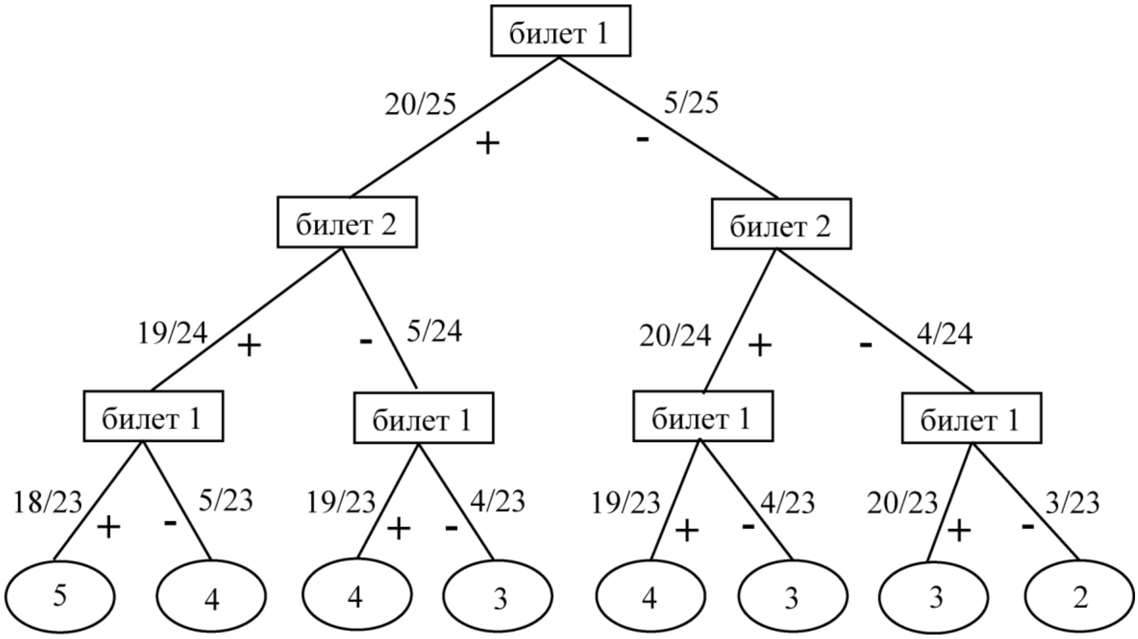
Таким образом, условию задачи удовлетворяют пары чисел $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Ответ: $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Задание 3. (12 б.)

При подготовке к экзамену ученик выучил 20 из 25 вопросов. На экзамене он вытянул билет из трех вопросов. Оценка «удовлетворительно» ставиться, если учащийся правильно отвечает только на один вопрос билета, «хорошо» – на два, «отлично» – на все три. Какую оценку этот ученик получит с наибольшей вероятностью? Найдите эту вероятность.

Решение. Изобразим граф. Плюсами и минусами обозначено, знает ученик выбранный билет, или нет. В последних вершинах графа стоит оценка, которую получит ученик.



Глядя на такой граф удобно подсчитать вероятность получения каждой из оценок:

$$P(5)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}\approx 0,496,$$

$$P(4)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{23}+\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{19}{23}\approx 0,413,$$

$$P(3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{4}{23}+\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{20}{23}\approx 0,087,$$

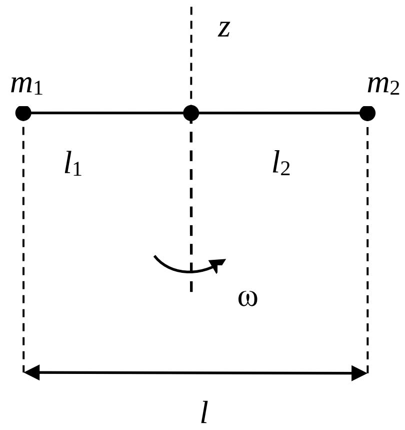
$$P(2)=\frac{5}{25}\cdot\frac{4}{24}\cdot\frac{3}{23}\approx 0,004.$$

Таким образом, наиболее вероятной является оценка "отлично".

Ответ: наиболее вероятная оценка – отлично, ее вероятность составляет $\frac{57}{115}\approx 0,496$.

Задание 4. (14 б.)

Два шарика массами m_1 и m_2 посажены на тонкий невесомый стержень и могут скользить по нему без трения. Шарики соединены друг с другом нерастяжимой нитью длиной l. Стержень вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. На каких расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения стержня z расположатся при этом шарики? Какова будет сила натяжения нити T?



Решение. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2,$$

Спроецировав на горизонтальную ось, получим:

$$m_1 a_1 = m_1\omega l_1 = T_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2\omega l_2 = T_2,$$

Так как нить невесома и нерастяжима,

$$T_1 = T_2,$$

$$l_1 + l_2 = l,$$

Таким образом, приходим к системе уравнений относительно длин:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2,$$

$$l_1 + l_2 = l,$$

Решая систему, получаем:

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}, T = \frac{m_1 m_2 \omega l}{m_1 + m_2}.$$

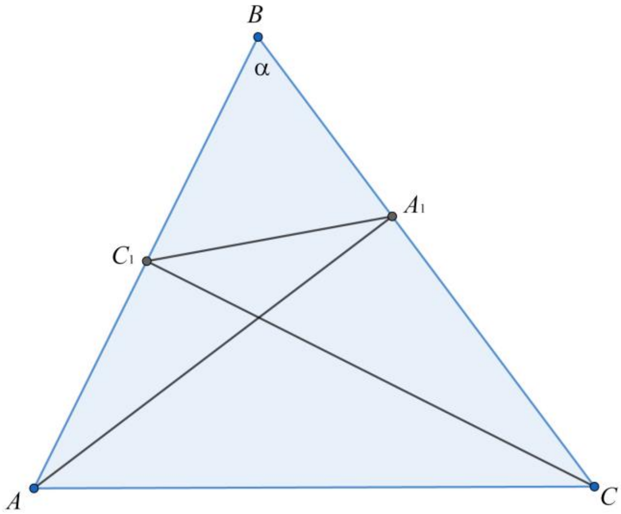
Ответ: $T = \dfrac{m_1 m_2 \omega l}{m_1 + m_2}$.

Задание 5. (14 б.)

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, при этом $AC = 5$, $A_1C_1 = 3$. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Решение. Треугольники ABC и A_1C_1B подобны с коэффициентом $k = |\cos\alpha|$ по свойству высот треугольника, тогда $|\cos\alpha| = k = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{3}{5}$. Следовательно $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

(стороны прямоугольного треугольника составляют пифагорову тройку) и по теореме синусов в $\triangle ABC$: $R = \dfrac{AC}{2\sin\alpha} = \dfrac{25}{8}$.



Ответ: $\dfrac{25}{8} = 3{,}125$.

Задание 6. (16 б.)

Автомобиль с расстоянием между передними и задними колесами L скользит по льду с заблокированными колесами со скоростью V. Выехав на асфальт, автомобиль останавливается, проехав расстояние l. На каком расстоянии остановятся в такой же ситуации сани с длиной полозьев L? Сани имеют тот же вес, что и автомобиль, и от же коэффициент трения, как у колес автомобиля. Считается, что вес автомобиля равномерно распределен по осям.

Решение. Задача делится на две части.

1. Необходимо вначале определить коэффициент трения между колесами автомобиля (полозьями санок) и асфальтом. Так как по условию вес автомобиля равномерно распределен по осям, то и на первую, и на вторую ось приходится реакция опоры, равная:

$$N_1 = N_2 = \frac{mg}{2}.$$

До того момента, как на асфальт заедут задние колеса, сила трения, действующая на автомобиль, постоянна и равна:

$F_{тр1} = \mu N_1 = \dfrac{\mu mg}{2}$, а после того, как заедут все колеса, сила трения будет равна $F_{тр2} = \mu\left(N_1 + N_2\right) = \mu mg$.

Работа сил трения на всем тормозном пути равна:

$$A_{внешних\ сил} = A_{трения} = -F_{тр1}L - F_{тр2}\left(l - L\right) = -\mu mg\left(l - \frac{L}{2}\right).$$

Согласно закону изменения полной механической энергии,

$$A_{внешних\ сил} = \Delta E = 0 - \frac{mV^2}{2}.$$

Решая уравнение относительно коэффициента трения, получаем $\mu = \frac{V^2}{g(2l-L)}$, и ограничение на длины $2l > L$.

2. Теперь найдем расстояние, которое пройдут в аналогичных условиях санки.

По закону изменения полной механической энергии,

$$A_{внешних\ сил} = A_{трения} = \Delta E = 0 - \frac{mV^2}{2}, \ (*)$$

однако отличие от предыдущей ситуации в том, что сила трения зависит от длины полозьев x, в данный момент находящихся на асфальте:

$$F_{тр}(x) = \begin{cases} \mu mg \frac{x}{L}, x \le L \\ \mu mg,\ x > L \end{cases}$$

Работа силы трения при перемещении на расстояние l' до остановки равна площади под графиком $F_{тр}(x)$ (с учетом знака):

$$A_{трения} = \begin{cases} -\frac{\mu mg(l')^2}{2L}, l' \le L \\ -\mu mg\left(l' - \frac{L}{2}\right), l' > L \end{cases} \quad (**)$$

Решая (*) и (**) относительно l', получаем:

$$l' = \begin{cases} \sqrt{L(2l-L)},\ 2l \ge L \\ l, 2l < L \end{cases}$$

Очевидно, физический смысл имеет только первое решение, поскольку ранее было получено:

$$\mu = \frac{V^2}{g(2l-L)} > 0 \Rightarrow 2l > L.$$

Решения задач краевой Политехническая олимпиада для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Очный этап. 11 кл.

Задание 1. (6 б.)

Школьник решает тест по математике, где к каждому из вопросов имеются 5 вариантов ответа, один из которых правильный. С вероятностью 0,7 школьник умеет решать очередную задачу теста. Но при этом он может сделать арифметическую ошибку с вероятностью 0,1. Если же школьник не знает, как решать задачу, то он выбирает ответ наугад. При проверке задачи оказалось, что она решена верно. Найти вероятность того, что школьник решал ее наугад.

Решение. Обозначим за A событие – дан верный ответ на задачу. Этому могло предшествовать два события: B_1 – ученик решал задачу осознанно, B_2 – школьник выбрал ответ наугад. По условию задачи, вероятность $P(B_1)=0,7$, тогда вероятность $P(B_2)=0,3$. Условная вероятность получения правильного ответа, при условии, что ученик решал задачу осознанно, $P_{B_1}(A)=1-0,1=0,9$, при условии выбора одного из 5 вариантов ответа наугад $P_{B_2}(A)=0,2$. Тогда по теореме Байеса находим вероятность того, что школьник решал задачу верно, действовав наугад:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_1}(A)}=\frac{0,3\cdot 0,2}{0,7\cdot 0,9+0,3\cdot 0,2}=\frac{2}{23}\approx 0,09.$$

Замечание: вместо формулы Байеса можно использовать графы.

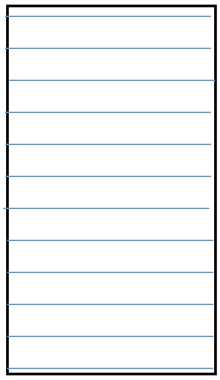
Ответ: $\frac{2}{23}$.

Задание 2. (10 б.)

Двое рабочих должны выкопать цилиндрический колодец глубиной $H=2$ м. До какой глубины h следует копать первому рабочему, чтобы работа оказалась распределенной поровну? Считать, что грунт однороден и рабочие поднимают его до поверхности Земли.

Решение. Разобьем колодец на очень тонкие слои (диски) толщиной Δh_i каждый (см. рисунок). Тогда, чтобы поднять на поверхность *i-ый* слой земли, находящийся на глубине h_i , потребуется совершить работу против сил тяжести, равную:

$A_i=m_i g h_i=\rho V_i g h_i=\rho\pi R^2 g h_i \Delta h_i$, где ρ – плотность грунта.



Чтобы найти работу, которую необходимо совершить, чтобы поднять на поверхность весь грунт до глубины Н, необходимо найти сумму вида:

$$A(H)=\sum_i A_i=\rho\pi R^2 g\sum_i h_i\Delta h_i \,.$$

Сумму $\sum_i h_i\Delta h$ можно определить как площадь под графиком функции $y(h)=h$ при $h\in[0,H]$:

$$\sum_i h_i\Delta h_i=\frac{1}{2}H^2 \,.$$

Вся работа по доставанию грунта равна:

$$A(H)=\frac{\rho\pi R^2 g H^2}{2}\,, (*)$$

половина этой работы будет выполнена при высоте h, которую можно найти из условия $A(h)=\frac{\rho\pi R^2 g h^2}{2}=\frac{1}{2}A(H)=\frac{\rho\pi R^2 g H^2}{4}$.

Сокращая одинаковые множители, получаем:

$$h^2=\frac{1}{2}H^2 \text{ или } h=\frac{\sqrt{2}}{2}H\approx 1{,}4\,м\,.$$

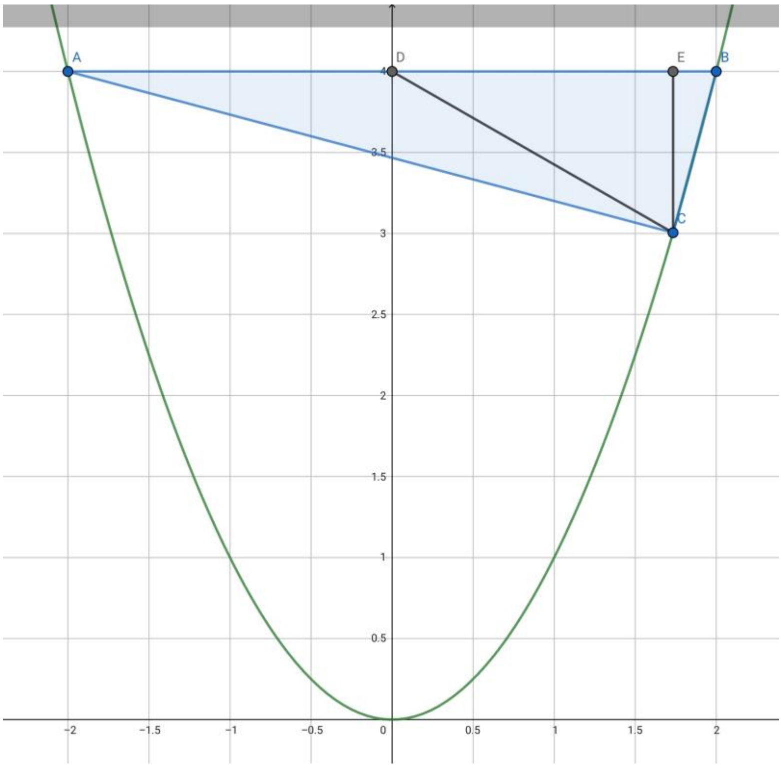
Примечание: решения задачи, не содержащие вывода формулы (*), не считаются правильными даже в случае верного численного ответа.

Ответ: $\sqrt{2}$ м.

Задание 3. (12 б.)

Дан прямоугольный треугольник, все вершины которого лежат на параболе $y=x^2$ и гипотенуза параллельная оси абсцисс. Доказать, что высота этого треугольника равна единице.

Решение. Обозначим за a и c абсциссы т. A и C, соответственно. Поскольку все вершины треугольника лежат на параболе и его гипотенуза параллельна оси абсцисс, вершины треугольника имеют координаты $A(-a,a^2)$, $B(a,a^2)$, $C(c,c^2)$.



Тогда высота треугольника равна расстоянию между т. C и прямой AB и равна $CE = a^2 - c^2$. Проведем медиану $CD = \frac{AB}{2} = a$ по свойству медианы прямоугольного треугольника. Основание медианы имеет координаты $D(0, a^2)$. Найдем длину медианы как расстояние между точками D и C:

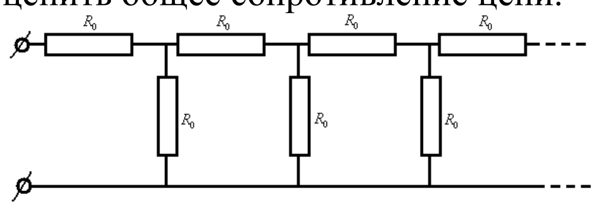
$$DC = \sqrt{(c-0)^2 + (c^2 - a^2)^2} = a \Rightarrow c^2 + (c^2 - a^2)^2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)(c^2 - a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow CE \cdot (CE - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} CE = 0, \\ CE = 1. \end{array}\right.$$

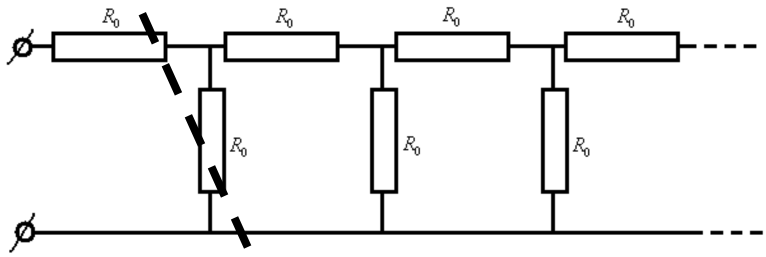
Поскольку высота не равна нулю, она равна 1.

Задание 4. (12 б.)

В электронном приборе собрана цепочка одинаковых резисторов (сопротивлений), схема которой представлена на рис. Цепочка настолько длинная, что ее можно считать бесконечной. Оценить общее сопротивление цепи.



Решение. Мысленно разделим схему на две части, как показано ниже:



Можно заметить, что часть справа от линии полностью эквивалентна исходной цепи. Следовательно, общее сопротивление правой части равно сопротивлению всей цепи *R*. Таким образом, цепь можно перерисовать в конечном виде:

Тогда общее сопротивление равно:

$$R = R_0 + \frac{R_0 R}{R + R_0}\ ,$$

Преобразуя к уравнению относительно *R*, получим:

$$R^2 - R_0 R - R_0^2 = 0,$$

Решая уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем:

$$R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R_0.$$

Ответ: $R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R_0.$

Задание 5. (14 б.)

На банковский счет была внесена некоторая сумма. Первоначально тарифная ставка составляла 5% годовых, затем она была изменена до 12%, после этого до $11\frac{1}{9}$% и окончательно до 12,5% годовых. Каждая тарифная ставка действовала целое число лет, в итоге вклад увеличился на $104\frac{1}{6}$%. Найти срок действия каждой из ставок.

Решение. Обозначим за S первоначальную сумму вклада, за $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ - сроки действия каждой из тарифных ставок. Тогда итоговая сумма вклада вычисляется по формуле:

$$S\left(1+\frac{5}{100}\right)^{x_1}\left(1+\frac{12}{100}\right)^{x_2}\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^{x_3}\left(1+\frac{12{,}5}{100}\right)^{x_4} = S\left(\frac{21}{20}\right)^{x_1}\left(\frac{28}{25}\right)^{x_2}\left(\frac{10}{9}\right)^{x_3}\left(\frac{9}{8}\right)^{x_4}.$$

По условию задачи, итоговая сумма вклада увеличилась на $104\tfrac{1}{6}\%$ и составляет $S\left(1+\dfrac{104\tfrac{1}{6}}{100}\right)=S\dfrac{49}{24}$. Тогда имеет место:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{x_1}\left(\frac{28}{25}\right)^{x_2}\left(\frac{10}{9}\right)^{x_3}\left(\frac{9}{8}\right)^{x_4}=\frac{49}{24}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3\cdot7\cdot2^{-2}\cdot5^{-1}\right)^{x_1}\left(7\cdot2^{2}\cdot5^{-2}\right)^{x_2}\left(2\cdot5\cdot3^{-2}\right)^{x_3}\left(3^{2}\cdot2^{-3}\right)^{x_4}=7^2\cdot2^{-3}\cdot3^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-2x_1+2x_2+x_3-3x_4}\cdot3^{x_1-2x_3+2x_4}\cdot5^{-x_1-2x_2+x_3}\cdot7^{x_1+x_2}=2^{-3}\cdot3^{-1}\cdot5^{0}\cdot7^{2}.$$

Для выполнения последнего уравнения должны быть равны степени соответствующих простых чисел:

$$\begin{cases}-2x_1+2x_2+x_3+3x_4=-3,\\ x_1-2x_3+2x_4=-1,\\ -x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2=2.\end{cases}$$

Так как все переменные системы – натуральные числа, из последнего уравнения имеем $x_1=x_2=1$, тогда из третьего уравнения: $x_3=x_1+2x_2=3$, из второго: $x_4=\dfrac{2x_3-x_1-1}{2}=2$. Таким образом, каждая из ставок действовала в течении 1, 1, 3 и 2 лет.

Ответ: 1, 1, 3, 2.

Задание 6. (16 б.)

В калориметр поместили 400 г воды при 20 ^oC и 100 г льда при -8 ^oC. В каком агрегатном состоянии и при какой температуре будет находится вода в калориметре спустя некоторое время? Теплоемкости воды и льда: $c_{\text{воды}}=4,2$ кДж/кг$^o C$, $c_{\text{льда}}=2,1$ кДж/кг$\cdot^\circ C$, удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

Решение. Оценим количество теплоты, которое выделит вода при остывании до температуры фазового перехода ($0^\circ C$):

$$Q_1=c_{воды}m_{воды}\left(0-20\right)=-33600\,Дж.$$

Количество теплоты, которое необходимо для нагревания льда до температуры фазового перехода:

$$Q_2=c_{льда}m_{льда}\left(0-\left(-8\right)\right)=1680\,Дж.$$

Количество теплоты, необходимое для полного расплавления льда, оказывается меньше, чем имеется согласно уравнению теплового баланса:

$$Q_3=\lambda m_{льда}=33000\,Дж<-Q_1+Q_2.$$

Следовательно, в конце процесса вода будет находиться одновременно в обоих агрегатных состояниях, что возможно только при температуре фазового перехода ($0^\circ C$). При этом часть льда массой $m_{льда} = \dfrac{-Q_1 + Q_2}{\lambda} \approx 97\,г$ – растает.

Ответ: в калориметре будет находиться 3 г льда и 497 г воды при температуре $0^\circ C$.