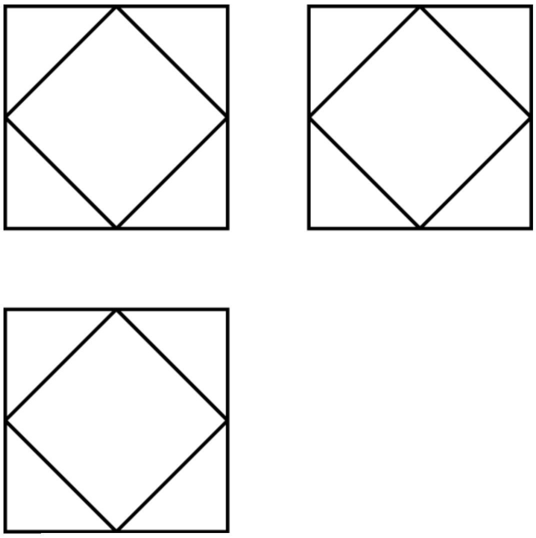
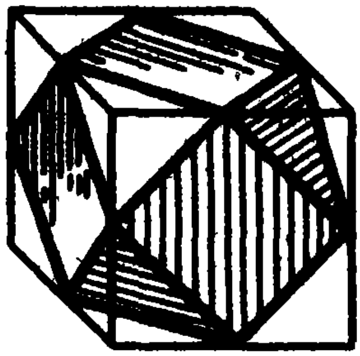
Ответы и решения задач краевой Политехнической олимпиады

для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Заочный этап. 9 класс

Задание 1. (6 б.)
На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке. Также условиям данной задачи удовлетворяет деталь, состоящая из 8 треугольных пирами, соединенных вершинами, т.е. являющаяся той частью куба, которая на рис. из куба вырезана.



Критерии оценивания:

- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (10 б.) В емкости смешали a килограммов 6% раствора соли и b килограммов 20% раствора соли. Полученный раствор обладает следующим свойством. При смешивании его с одним килограммом 6% раствора получается 10% раствор, а при смешивании с одним килограммом 20% раствора получается 18% раствор. Найти массы a и b.

Ответ: $a = 0,25$, $b = 0,5$ кг.

Решение: После первого смешивания в емкости содержится $0,06a + 0,2b$ кг соли. Если прибавить к этому раствору 1 кг 6% раствора, получится раствор, содержащий $0,06(a+1) + 0,2b$ кг соли, а если прибавить 1 кг 20% раствора - $0,06a + 0,2(b+1)$ кг соли. Известно, что в первом случае получиться 10% раствор массой $a + b + 1$ кг, который будет содержать $0,1(a + b + 1)$ кг соли, а во втором случае 18% раствор той же массы, содержащий $0,18(a + b + 1)$ кг соли. Таким образом, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,06(a+1) + 0,2b = 0,1(a+b+1), \\ 0,06a + 0,2(b+1) = 0,18(a+b+1). \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $a+b=0,75$. Затем, подставляя $b=0,75-a$ в одно из уравнений, получаем $a=0,25$, $b=0,5$.

Критерии оценивания:

- Верное определение количества соли после каждой из операций – по 1 б (итого 5 б)
- Верное составление уравнения – по 3,5 б (итого 7 б)
- Верное решение системы уравнений – 3 б
- Решение задачи другими методами – от 0 до 10 б

Задание 3. (12 б.) Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние L, а затем начинает тормозить с постоянным ускорением a. При какой начальной скорости частицы время ее движения от вылета из источника до остановки будет наименьшим?

Ответ: $v_{\min}=\sqrt{La}$.

Решение: Время движения складывается из времени движения со скоростью v и времени торможения с ускорением a:

$$t=t_1+t_2=\frac{L}{v}+\frac{v}{a}=\frac{La+v^2}{av}$$

Преобразовав уравнении к виду $v^2-tav+La=0$, получим квадратичную функцию. Графиком которой является парабола с вершиной в точке $v_0=\frac{ta}{2}$. Подставляя данное значение скорости в выражение для времени, получаем наименьшее время $t_{\min}=\sqrt{\frac{2L}{a}}$ и по нему находим скорость $v_{\min}=\sqrt{La}$.

Критерии оценивания:

- Получено выражение для времени – 2,5 б
- Верно найдена связь между наименьшим временем и начальной скоростью – 7,5 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 10 б

Задание 4. (12 б.) Найдите множество значений функции $y=11-x^2-2\sqrt{9-x^2}$.

Ответ: $E(y)=[1;5]$.

Решение: Введем новую переменную $t=\sqrt{9-x^2}$, которая принимает значения $t\in[0;3]$. Тогда $x^2=9-t^2$ и исходная функция имеет вид $y=11-(9-t^2)-2t=t^2-2t+2$. Графиком данной функции является парабола, определенная на отрезке $[0;3]$. Минимум данной параболы находится в точке с абсциссой $t_0=-\frac{b}{2a}=1$ и ординатой $y(1)=1$. Наибольшее значение достигается на одном из концов рассматриваемого отрезка: $y(0)=2$, $y(3)=5$. Таким образом, наименьшее значение функции равно 1, наибольшее – 5, значит область значений имеет вид $E(y)=[1;5]$.

Критерии оценивания:

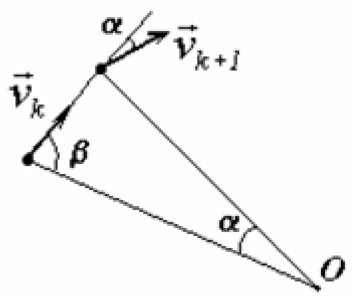
- Правильно найдена область определения функции – 1 б
- Верно определено множество значений функции $t=\sqrt{9-x^2}$ – 3 б
- Задача верно сведена к исследованию квадратичной функции – 8 б
- Найдено наибольшее или наименьшее значение функции – по 2 б (итого 4 б)

Задание 5. (14 б.) N черепах находятся в вершинах правильного N-угольника со стороной L и начинаются двигаться с постоянными по модулю скоростями u, так что вектор скорости первой все время направлен на вторую, второй на третью, ..., n-ой на первую. Через какое время черепахи встретятся?

Ответ: $t = \dfrac{L}{v_{сбл}} = \dfrac{L}{2v\sin^2\dfrac{\pi}{n}}$.

Решение: Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент времени черепахи будут находиться в вершинах правильного n-угольника, который постоянно поворачивается и сжимается. Однако в процессе движения углы между векторами скоростей черепах изменяться не будут. Легко найти угол между скоростями «соседних» черепах - он равен центральному углу α правильного n-угольника, причем $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$. Поэтому скорость сближения соседних черепах находится по формуле $v_{сбл} = v(1-\cos\alpha)$ или $v_{сбл} = 2v\sin^2\dfrac{\pi}{n}$.

Тогда время движения черепах до встречи вычисляется по формуле $t = \dfrac{L}{v_{сбл}} = \dfrac{L}{2v\sin^2\dfrac{\pi}{n}}$.



Критерии оценивания:

- Найден угол между черепахами – 1,5 б
- Правильно найдена скорость сближения черепах – 8,5 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 12 б

Задание 6. (16 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30\,000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. На начало января на предприятии работало 400 рабочих, каждый из которых получал по 30 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих – 900 человек, зарплата – 30 000 руб.

Решение: Заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$p_i = p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right),$$

$$N_i = N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right),$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца; α и β - коэффициенты пропорциональности.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \frac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \frac{\Delta N}{\Delta p} = 0,01$.

Используя приведенные выше формулы, составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	30 000	40 000	50 000	50 000	30 000
N_i	400	400	500	700	900

Анализ таблицы показывает, что нехватка рабочих на предприятии в начале рассматриваемого периода приводит к увеличению зарплаты в конце января, но рабочие еще не знают об этом увеличении и их количество в январе не меняется. Поэтому в конце февраля зарплата вновь увеличивается и возрастает количество рабочих, узнавших об увеличении зарплаты в январе. В марте зарплата не меняется, т.к. количество рабочих равно равновесному значению, но рабочие по прежнему продолжают поступать, т.к. зарплата значительно превышает равновесную. Поскольку на конец апреля количество рабочих на предприятии значительно больше необходимого, зарплата резко падает, но еще не узнавшие об этом рабочие продолжают приходить на предприятие.

При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

Критерии оценивания:

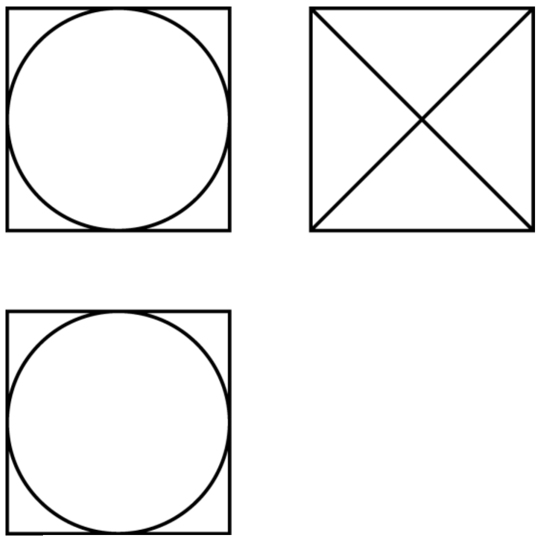
- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих – по 2,5 б (итого 5 б)
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1,5 б (итого 6 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б

Ответы и решения задач краевой Политехнической олимпиады

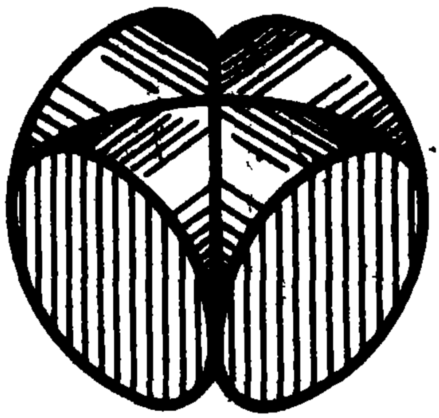
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Заочный этап. 10 класс

Задание 1. (6 б.)

На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке:



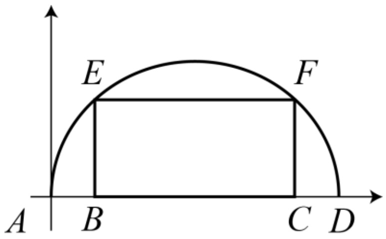
Критерии оценивания:

- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (8 б.) Найдите наибольший периметр прямоугольника, две из вершин которого лежат на графике функции $y = 3x - x^2$, а две другие – на оси абсцисс.

Ответ: 6,5.

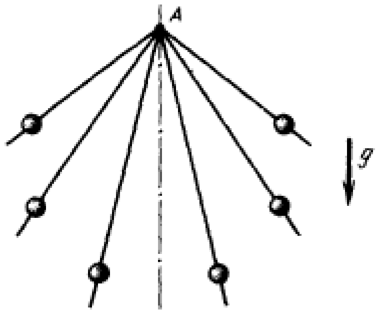
Решение: Рассмотрим прямоугольник $BCFE$. Парабола $y = 3x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $A(0;0)$ и $D(3;0)$. Обозначим $AB = x$, тогда $BC = 3 - 2x$, $BE = y = 3x - x^2$. Найдем периметр прямоугольника $P(x) = 2\left(BC + BE\right) = 2\left(3 - 2x + 3x - x^2\right) = 2\left(-x^2 + x + 3\right)$. Периметр является квадратичной функций, которая принимает наибольшее значение в вершине параболы $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$. При этом периметр равен $P\left(0{,}5\right) = 6{,}5$.



Критерии оценивания:

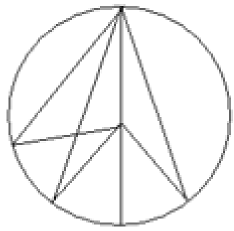
- Правильно сделан рисунок к задаче – 1,5 б
- Путем перебора исследованы периметры различных прямоугольников – до 2,5 б
- Верно определены стороны прямоугольника – по 1,5 б (итого 3 б)
- Составлена зависимость $P(x)$ – 2 б
- Определение наибольшего значения функции – 3 б

Задание 3. (10 б.) Из точки A по длинным спицам, наклоненных к вертикали под различными углами, одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. Найдите кривую, на которой будут находиться бусинки в момент времени t.



Ответ: На окружности диаметра $\frac{gt^2}{2}$ с верхней точкой в точке A.

Решение: Перемещение каждой бусинки по соответствующей направляющей за время t равно $\frac{g\cos\alpha t^2}{2}$, где α – угол между направляющей и вертикалью. Далее можно заметить, что соответствующее выражение совпадает с длиной хорды, стянутой дугой, опирающейся на центральный угол 2α (время t в данном случае является параметром): $\frac{g\cos\alpha t^2}{2} = \frac{gt^2}{4}\sqrt{1-\cos 2\alpha}$. Диаметр окружности совпадает с максимальным перемещением бусинки – $\frac{gt^2}{2}$.



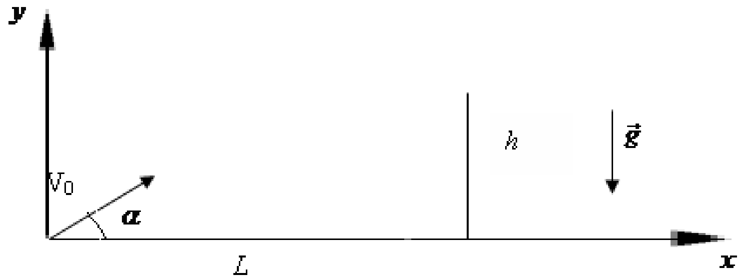
Критерии оценивания:

- Найдено расстояние, пройденное произвольной бусинкой – 2 б
- Правильно сделано геометрическое построение – 6 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 8 б

Задание 4. (14 б.) Из пушки стреляют через вертикальное препятствие высотой h, находящееся на расстоянии L от пушки. Снаряд вылетает с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтали. Найдите минимальную начальную скорость, с которой нужно запустить снаряд, чтобы он перелетел через препятствие. Определите угол выстрела α, соответствующий этой начальной скорости.

Ответ: $v_{0\min}=\sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)}$, $tg\alpha_{v_0\min}=\dfrac{v_0^2}{gL}$.

Решение: Введем оси координат так, как показано на рисунке, запишем уравнения движения снаряда вдоль осей x и y ($t_0=0$):



$$x(t)=v_0\cos\alpha t,\ (1)$$

$$y(t)=v_0\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}.\ (2)$$

В момент, когда снаряд находится прямо над препятствием $x=L, y=h$. Тогда

$$t_1=\frac{L}{v_0\cos\alpha},\ (3)$$

и, если преобразовать (2):

$$h=Ltga-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=Ltga-\frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1+tg^2\alpha\right).\ (4)$$

Решая квадратное уравнение относительно $tg\alpha$, имеем:

$$tg\alpha_{1,2}=\frac{v_0^2}{gL^2}\left(L\pm\sqrt{L^2-2\frac{gL^2}{v_0^2}\left(h+\frac{gL^2}{2v_0^2}\right)}\right),\ (5)$$

при выполнении условия

$$D=L^2-2\frac{gL^2}{v_0^2}\left(h+\frac{gL^2}{2v_0^2}\right)\geq 0.\ (6)$$

Проанализируем (6). Преобразовав правую часть выражения, и приравняв ее к нулю (т.к. ищем минимальное значение), получим квадратичное выражение относительно v_0^2:

$$v_0^4-2gv_0^2-g^2L^2=0,\ (7)$$

$$v_0^2=gh\pm g\sqrt{h^2+L^2}.\ (8)$$

Отсюда (т.к. выражение (8) дает только один положительный корень относительно v_0^2)

$$v_{0\min}=\sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)},\ (9)$$

и, соответственно,

$$tg\alpha_{v_0\min}=\frac{v_0^2}{gL}.\ (10)$$

Критерии оценивания:

- Решение верно доведено до уравнения (4) – 3 б
- Уравнение (4) верно разрешено относительно $tg\alpha$ - 5,5 б
- Выполнены верные преобразования дискриминанта (6), приводящие к выражению (7) – 8,5 б
- Уравнение (7) разрешены относительно v_0^2, но не отобраны корни, приводящие к (9), либо не получены выражения (9) и (10) – 11 б

Задание 5. (14 б.) В математическом лагере два отряда играли в волейбол за первое место. В самый ответственный момент матча судья решил, что мяч ушел в аут. Но многие не были согласны с этим решением. Оказалось, что один из болельщиков успел сделать три фотографии, пока мяч был в воздухе. Тогда ребята решили рассчитать траекторию полета мяча по имеющимся координатам трех точек, вычисленных по фотографиям: (6;3), (4;7) и (2;6). Считается, что мяч летит по параболической траектории вида $y = ax^2 + bx + c$ в системе координат, начало которой расположено на границе поля, против направления оси абсцисс. Определите траекторию движения мяча, найдите координаты точки, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли. Выясните, был ли судья прав (считается, что если мяч коснулся границы поля, то мяч забит).

Ответ: Уравнение имеет вид: $y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x$. Координаты: $(0;0)$ и $(6{,}8;0)$. Мяч коснулся границы поля, значит мяч был забит.

Решение: Так как известны 3 точки, в которых находился мяч, подставив соответствующие значения координат в уравнение $y = ax^2 + bx + c$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 6, \\ 16a + 4b + c = 7, \\ 36a + 6b + c = 3. \end{cases}$$

Данную систему можно решить, например, методом Крамера. При этом $\Delta = -16$, $\Delta_1 = 10$, $\Delta_2 = -68$, $\Delta_3 = 0$, тогда корни $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{8}$, $a = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{17}{4}$, $a = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$. Тогда уравнение параболы имеет вид $y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x$. Для определения координат точек, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли, приравняем данную функцию к нулю: $-\frac{5}{8}x^2 + \frac{17}{4}x = 0$. Откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 6{,}8$. Значить удар был произведен из точки с координатами $(6{,}8;0)$, а коснулся мяч земли в точке с координатой $(0;0)$. Таким образом, мяч был забит.

Критерии оценивания:

- Верно составлено уравнение системы – по 1 б (итого 3 б)
- Правильно определен коэффициент в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ – по 2,5 б (итого 7,5 б)
- Правильно решено квадратное уравнение – 1,5 б
- Правильно найдены координаты точки, из которой был произведен удар по мячу и точки, в которой он коснулся земли и сделан вывод о правоте судьи – 2 б

Задание 6. (18 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Составьте уравнения, описывающие изменение зарплаты и количества рабочих со временем.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30\,000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. Пусть на начало января на предприятии работало 550 рабочих, каждый из которых получал по 25 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

<u>Ответ:</u> Количество рабочих – 300 человек, зарплата – 50 000 руб. Уравнения см. ниже.

<u>Решение:</u> Изменение зарплаты и численности рабочих по времени определяются одной из формул (1)-(3):

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ N'(t) &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right)\Delta t, \\ \Delta N &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right)\Delta t, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $p'(t)$, $N'(t)$ - производные от зарплаты и количества рабочих по времени, соответственно; Δp, ΔN - изменение зарплаты и количества рабочих за промежуток времени Δt; α и β - коэффициенты пропорциональности.

Тогда заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right), \\ N_i &= N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (4)$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \frac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \frac{\Delta N}{\Delta p} = 0,01$.

Используя соотношения (4), составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	25 000	20 000	20 000	30 000	50 000
N_i	550	500	400	300	300

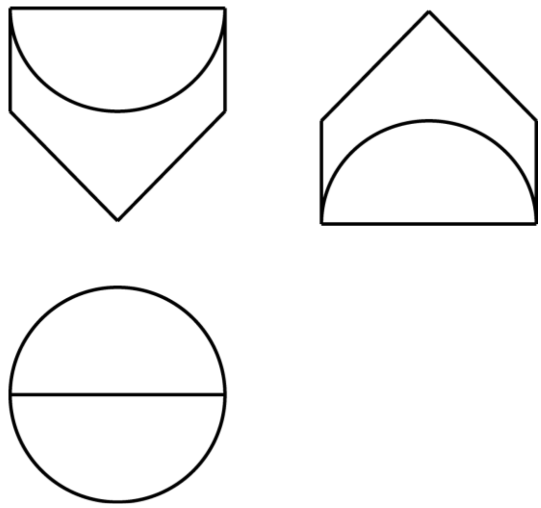
При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

Критерии оценивания:

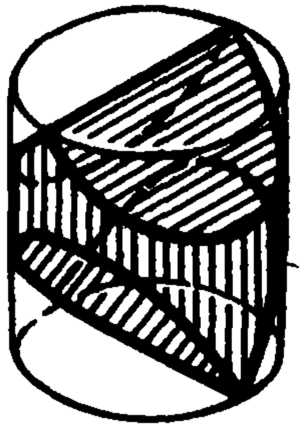
- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих в форме (1), (2) или (3) – по 3 б (итого 6 б)
- Верно составлено рекуррентное соотношение (4) – 3 б
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1 б (итого 4 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б

Ответы и решения задач краевой Политехнической олимпиады для учащихся г. Перми и Пермского края. 2017 г. Заочный этап. 11 класс

Задание 1. (6 б.)
На рисунке представлены три прямоугольные проекции некоторой детали: вид спереди, сбоку и сверху. Может ли существовать такая деталь? Нарисуйте или опишите эту деталь, если она существует.



Ответ: Деталь существует, она изображена на рисунке:



Критерии оценивания:
- Указание на существование детали без ее описания или рисунка – 0,5 б
- Рисунок или описание детали – от 0 до 6 б

Задание 2. (8 б.) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся количеству добавили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и добавили 2 л воды, затем вновь повторили эту операцию. В результате всех операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Найдите количество воды и глицерина, оказавшихся в сосуде после всех проделанных операций.

Ответ: 0,5 л глицерина и 3,5 л воды.

Решение: Обозначим за x объем сосуда, тогда после первой операции глицерин займет $\frac{x-2}{x}$ часть сосуда. Отлив 2 л смеси, получим $\frac{x-2}{x}(x-2)$ л глицерина в сосуде, а после доливания 2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$ часть сосуда. Аналогично после следующей замены 2 л смеси на 2 л воды, глицерин займет $\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$ часть сосуда. Тогда количество глицерина в сосуде после всех операций равно $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3$, а количество воды $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3$. В сумме же они дают первоначальный объем сосуда. Таким образом, получаем кубическое уравнение:

$$2x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3+3=x. \quad (1)$$

$$x^3-9x^2+24x-16=0,$$

$$(x-1)(x-4)^2=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=4.$$

Первый корень не подходит по смыслу задачи, следовательно $x=4$, количество глицерина $x\left(\frac{x-2}{x}\right)^3=0,5$ л, количество воды 3,5 л.

<u>Критерии оценивания:</u>

- Правильно определено количество или найдена доля глицерина в сосуде после каждой операции – по 1 б (итого 3 б)
- Составлено уравнение (1) – 2 б
- Верно решено уравнение (1) – 2 б
- Произведен отбор корней и определено количество воды и глицерина – 1 б

<u>Задание 3. (10 б.)</u> Сферический резервуар радиуса R стоит на земле. С уровня земли через данный резервуар перебрасывают камень. Найти начальную скорость и угол вылета, при которых камень перелетит через резервуар, коснувшись его только в наивысшей точке.

<u>Ответ</u>: $v_0=\sqrt{5Rg},\ tg\alpha=2.$

<u>Решение</u>: Из кинематики находим высоту подъема камня в высшей точке:

$$y_{\max}=2R=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}. \quad (1)$$

Радиус кривизны траектории в верхней точке должен быть равен радиусу шара (из формулы для нормального ускорения в верхней точке):

$$a_n=g=\frac{v_x^2}{R}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{R}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1)-(2), получаем:

$$v_0=\sqrt{5Rg},\ tg\alpha=2.$$

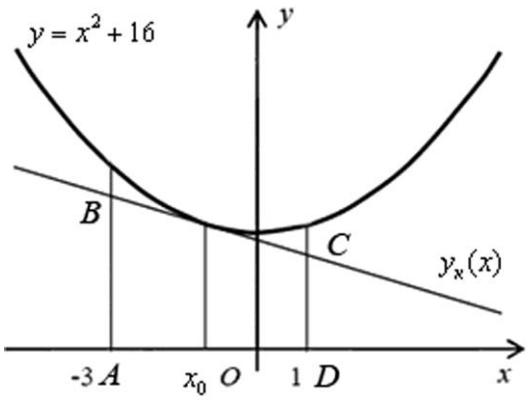
<u>Критерии оценивания:</u>

- Решение верно доведено до уравнения (1) – 4 б
- Решение верно доведено до уравнения (2) – 6 б
- Верное решение с вычислительными ошибками – до 8 б

<u>Задание 4. (14 б.)</u> Найдите наибольшую площадь фигуры на плоскости xOy, ограниченной прямыми $x=-3$ и $x=1$, осью Ox и касательной к графику функции $y=x^2+16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3\le x_0\le 1$.

<u>Ответ</u>: 68.

Решение: Составим уравнение касательно, проведенной к графику функции $y = x^2 + 16$ в точке x_0: $y_к(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = x_0^2 + 16 + 2x_0(x - x_0) = -x_0^2 + 2xx_0 + 16$. Получившаяся фигура на плоскости – это трапеция $ABCD$, площадь которой $S = \frac{AB + CD}{2} AD$. Для данной трапеции высота $AD = 1 - (-3) = 4$, $AB = y_к(-3) = -x_0^2 - 6x_0 + 16$, $CD = y_к(1) = -x_0^2 + 2x_0 + 16$. Тогда площадь $S(x_0) = 4(-x_0^2 - 2x_0 + 16)$. $S'(x_0) = 4(-2x_0 - 2) = 0$, значит максимум этой функции достигается при $x_0 = -1$ и равно $S(-1) = 4(-1 + 2 + 16) = 68$.



Критерии оценивания:
- Сделан верный рисунок к задаче – до 1,5 б
- Составлено уравнение касательной – 4 б
- Найдены основания и высота трапеции – по 2 б (итого 6 б)
- Выражена площадь трапеции в зависимости от точки касания – 1 б
- Найден максимум данной функции и вычислена наибольшее значение площади – 3 б

Задание 5. (14 б.) Материальная точка, имеющая массу 1 кг, движется под действием горизонтальной силы $F = 10(1 - t)$ Н. Ее начальная скорость $v_0 = 20$ м/с и сила F совпадают по направлению. По истечению 1 секунды сила поменяет направление и начнет препятствовать движению точки. Найдите зависимость скорости данной точки от времени. Определите, за какое время точка полностью остановится.

Ответ: $v(t) = 10t - 5t^2 + 20$ м/с, $t_{ост} = 1 + \sqrt{5}$ с.
Решение: Запишем второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось $ma = F = 10(1 - t)$. Тогда $a = \frac{F}{m} = 10(1 - t)$. Согласно физическому смыслу производной $a = v'$, тогда скорость равна первообразной от ускорения $v(t) = 10t - 5t^2 + C$. Для определения неизвестной константы C воспользуемся условием $v_0 = 20$ м/с: $v(0) = C = 20$, тогда $v(t) = 10t - 5t^2 + 20$ м/с. Приравнивая скорость к нулю, получаем $10t - 5t^2 + 20 = 0$, откуда $t = 1 \pm \sqrt{5}$. Поскольку время не может быть отрицательным, $t_{ост} = 1 + \sqrt{5}$ с.

Критерии оценивания:
- Определено ускорения из второго закона Ньютона – 2 б
- Указание на связь между скоростью и ускорением без определения скорости – 1 б
- Определение скорости как первообразной без учета неизвестной константы – 3 б
- Верно определена зависимость скорости от времени с помощью понятия первообразной, интеграла или какими-либо другими способами – 8 б

- Правильно составлено и решено квадратное уравнение для определения времени остановки – 3 б
- Произведен отбор корней – 1 б

Задание 6. (18 б.) На рынке труда взаимодействуют работодатели и наемные рабочие. При этом зарплата и число занятых изменяются со временем по законам $p(t)$ и $N(t)$, соответственно. Пусть на некотором предприятии существует равновесное состояние, когда за зарплату $p_{равнов}$ согласны работать $N_{равнов}$ человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено, то работодатель меняет зарплату, пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. При этом число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению предлагаемой зарплаты от значения $p_{равнов}$.

Составьте уравнения, описывающие изменение зарплаты и количества рабочих со временем.

Пусть предприятию необходимо $N_{равнов} = 500$ рабочих, которым данное предприятие может обеспечить зарплату $p_{равнов} = 30000$ руб. Изменению зарплаты на 5 000 руб. от равновесного значения соответствует отклонение количества рабочих от равновесного значения на 50 человек. Пусть на начало января на предприятии работало 500 рабочих, каждый из которых получал по 20 000 руб. Считая, что изменение зарплаты, увольнение и прием на работу происходят только в конце каждого месяца, найдите количество рабочих и зарплату на предприятии на начало мая. Проанализируйте полученную динамику изменения зарплаты и количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих – 500 человек, зарплата – 70 000 руб. Уравнения см. ниже.
Решение: Изменение зарплаты и численности рабочих по времени определяются одной из формул (1)-(3):

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ N'(t) &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right), \\ \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \alpha\left(N_{равнов} - N(t)\right)\Delta t, \\ \Delta N &= \beta\left(p(t) - p_{равнов}\right)\Delta t, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $p'(t)$, $N'(t)$ - производные от зарплаты и количества рабочих по времени, соответственно; Δp, ΔN - изменение зарплаты и количества рабочих за промежуток времени Δt; α и β - коэффициенты пропорциональности.

Тогда заработная плата и количество человек в конце каждого месяца определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \alpha\left(N_{равнов} - N_{i-1}\right), \\ N_i &= N_{i-1} + \beta\left(p_{i-1} - p_{равнов}\right), \end{aligned} \qquad (4)$$

где p_i - зарплата, устанавливаемая в конце месяца; p_{i-1} - зарплата в начале месяца (была установлена в предыдущем месяце); N_i - количество рабочих на конец месяца (после увольнения и приема на работу); N_{i-1} - количество рабочих в начале месяца.

По условию задачи изменению зарплаты $\Delta p = 5000$ руб. соответствует изменение штата $\Delta N = 50$ человек. Отсюда коэффициенты пропорциональности $\alpha = \frac{\Delta p}{\Delta N} = 100$, $\beta = \frac{\Delta N}{\Delta p} = 0,01$.

Используя соотношения (4), составим таблицу динамики зарплаты и штата на предприятии.

	Начало января	Конец января	Конец февраля	Конец марта	Конец апреля - начало мая
i	0	1	2	3	4
p_i	20 000	20 000	30 000	50 000	70 000
N_i	500	400	300	300	500

При данной динамике легко заметить сильное запаздывание изменения зарплаты при изменении количества работающих и наоборот.

<u>Критерии оценивания:</u>

- Верно составлено уравнение для зарплаты или количества рабочих в форме (1), (2) или (3) – по 3 б (итого 6 б)
- Верно составлено рекуррентное соотношение (4) – 3 б
- Верно найдены коэффициенты пропорциональности – по 1 б (итого 2 б)
- Правильно определено кол-во рабочих и зарплата на конец каждого из месяцев – по 1 б (итого 4 б)
- Проведен анализ результатов – 3 б