Задания I (школьного) этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.

В олимпиаде имеет право принять участие каждый обучающийся (далее — Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать самостоятельное выполнение заданий олимпиады каждым Участником.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4 класса — 1-2 урока, для 5-6 классов — 2 урока, для 7-8 классов — 3 урока, для 9-11 классов — 3-4 урока.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

7 — Полное верное решение.

6-7 — Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5-6 — Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.

4 — Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.

2-3 — Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.

1 — Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

0 — Решение неверное, продвижения отсутствуют.

0 — Решение отсутствует.

При этом

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4 класс.

1. В ряд выписаны цифры 15102016. Расставьте между некоторыми из цифр знаки арифметических действий и скобки так, чтобы получилось 100.

   Ответ. $151 \cdot 0 + 20 \cdot (-1 + 6)$.

   Замечание. Возможны и другие варианты, например, $(15 + 10) \cdot (20 - 16)$.

2. Электронные часы показывают время 19:57:33. Через какое наименьшее число секунд все цифры на часах изменятся?

   Ответ. 147.

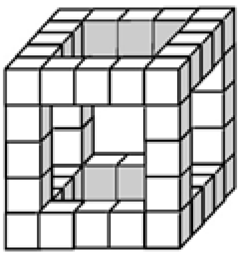
   Решение. Пока число часов остаётся 19, часть цифр на часах остаётся неизменной. Ближайшее другое число часов — 20. Тогда время полной смены цифр наступит не раньше 20:00:00, и видно, что это время нам подходит. До него должно пройти 2 минуты 27 секунд, т.е. 147 секунд.

3. Муравьишка ехал верхом на Гусенице 24 минуты, а потом пересел на Жука и проехал на нем в 4 раза больший путь. Сколько минут он ехал на Жуке, если Жук передвигается в 8 раз быстрее Гусеницы? (Движение происходило без остановок).

   Ответ. 12.

   Решение. Так как скорость Жука в 8 раз больше скорости гусеницы, то расстояние, которое Муравьишка преодолел на гусенице, Жук преодолеет за 3 минуты. Тогда в 4 раза больший путь он преодолеет за 12 минут.

4. Аня склеила из одинаковых маленьких кубиков «скелет» большого куба так, как видно на рисунке. Вася из таких же маленьких кубиков склеил «полный» куб такого же размера, как и Анин «скелет». На сколько меньше весит Анина конструкция, если каждый маленький кубик весит 1 грамм?

   Ответ. На 81 г.

   Решение. Сторона куба равна 5, поэтому «полный» куб весит 125 г. В «скелете» есть по 3 кубика на каждом ребре, итого $3 \cdot 12 = 36$, и еще 8 углов, итого 44 кубика. Следовательно, разница в весе составляет $125 - 44 = 81$ г.

5 класс.

1. Из литра молока получается 150 миллилитров сливок, а из литра сливок получают 300 граммов масла. Сколько килограммов масла получится из 100 литров молока?

   Ответ. 4,5 кг.

   Решение. Из 100 л молока получится 15000 мл сливок, что соответствует 15 л сливок. Из 15 литров сливок получится $300 \cdot 15 = 4500$ г масла, что соответствует 4,5 кг.

2. Если половину пути от дома до школы Петя идет, а половину — бежит, то он тратит на дорогу 10 минут, а если он весь путь бежит, то тратит 5 минут. Сколько минут Петя идет от дома до школы?

   Ответ. 15 минут.

   Решение. Если Петя весь путь бежит, то тратит 5 минут. Значит, половину пути он пробегает за 2,5 минуты. Тогда половину пути он проходит за 7,5 минут. А весь путь он проходит за 15 минут.

3. Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос:«Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

   Ответ. Нет.

   Решение. Если первый сказал правду, то тогда все говорят правду. Но второй сказал: «Да», т.е все не могут говорить правду. Противоречие. Значит, первый лжет, тогда второй говорит правду. Так как первый ответил «Нет» и при этом лгал, то третий приятель лжет. Т.е. третий ответит: «Нет».

4. Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 граммов больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 граммов больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

   Ответ. 400 граммов.

   Решение. Если бы пёс откусил два раза, от батона осталось бы 300 граммов. Если бы кот откусил два раза, от батона осталось бы 500 граммов. Поэтому разница между удвоенными укусами — 200 граммов. Значит пёс откусывает на 100 граммов больше, чем кот. После укуса кота останется колбасы на укус кота и ещё 500 граммов. Значит после укуса пса останется $500 - 100 = 400$ граммов.

6 класс.

1. Гусь, индюк и курица вместе весят 15 кг. Когда с ними на весы залез Гадкий Утенок, их средний вес уменьшился на 1 кг. Сколько весит Гадкий Утенок?

   Ответ. 1 кг.

   Решение. Средний вес гуся, индюка и курицы равен 5 кг, значит, средний вес гуся, индюка, курицы и Гадкого Утенка — 4 кг. Их общий вес — 16 кг, т.е. Гадкий Утенок весит 1 кг.

2. Четверо ребят обсуждали ответ к задаче. Коля сказал: «Это число 9». Роман: «Это простое число». Катя: «Это четное число». А Наташа сказала, что это число — 15. Назовите правильный ответ, если из двух мальчиков правду сказал один, и из двух девочек правду сказала тоже только одна.

   Ответ. 2.

   Решение. Колино утверждение не может быть правдой, так как тогда обе девочки неправы. Значит прав Роман, а Наташа не права. Тогда получаем, что число простое и четное, т.е. это число 2.

3. Как разрезать прямоугольник 22×15 см на прямоугольники 3×5 см?

   Решение. Разрежем сначала прямоугольник 22×15 на два прямоугольника $A = 10 \times 15$ и $B = 12 \times 15$. Отметим середину стороны длины 10 прямоугольника A, а сторону длины 15 этого прямоугольника поделим четырьмя точками на пять равных частей длины 3. Если провести через отмеченные точки прямые, параллельные сторонам A, то он разделится на $2 \cdot 5 = 10$ прямоугольников 5×3.

   В прямоугольнике B отметим на стороне длины 12 три точки, делящие её на четыре части длины 3, на стороне длины 15 отметим две точки, делящие её на три части длины 5. Если провести через отмеченные точки прямые, параллельные сторонам B, то он разделится на $4 \cdot 3 = 12$ прямоугольников 5×3.

4. Ирина, Борис и Виктор взяли девять карт, написали на них цифры от 1 до 9 и взяли по две карты каждый. Три карты остались лежать на столе. Оказалось, что сумма чисел на картах у каждого игрока четна. Какова наименьшая возможная сумма чисел на картах, оставшихся на столе?

   Ответ. 7.

   Решение. Сумма от 1 до 9 равна 45. Так как у каждого игрока четная сумма, то сумма чисел на всех их шести картах также чётна, значит, на столе осталась нечетная сумма. Поэтому среди трех оставшихся чисел должно быть либо три нечетных, либо одно нечетное и два четных.

   Если на столе три нечётных числа, то самое маленькое не меньше 1, второе по величине не меньше тройки, самое больше не меньше пятёрки, значит их сумма не меньше $1 + 3 + 5 = 9$.

   Если на столе одно нечётное и два четных, то самое маленькое из чётных не меньше 2, второе по величине чётное не меньше 4, а нечётное число не меньше 1, значит их сумма не меньше $1 + 2 + 4 = 7$.

   Итак, сумма чисел на оставшихся на столе картах не меньше 7. Она достижима, например, при таком распределении карт: у Ирины карты $3, 9$, у Бориса — $5, 7$, у Виктора — $6, 8$.

7 класс.

1. Длину каждой стороны квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь?

   Ответ. 44.

   Решение. Пусть сторона квадрата равна a, тогда его площадь равна a^2. Сторона квадрата после увеличения — 1,2a, его площадь — 1,44a^2, что на 44% больше площади исходного.

2. 16 тарелок расставили по кругу. Можно ли разложить на тарелках 55 конфет так, чтобы число конфет на любых двух соседних тарелках отличалось на 1?

   Ответ. Нельзя.

   Решение. Если число конфет на двух соседних тарелках отличается на 1, то эти числа разной чётности. Так как тарелок 16, то на 8 лежит четное число конфет и на 8 — нечетное число конфет. Значит всего конфет есть чётно число (сумма восьми чётных и восьми нечётных), а 55 нечётно.

3. В каждый из четырех походов ходила группа из 20 человек. Во все 4 похода ходили 10 человек. Ровно в 3 похода ходили 9 человек. Ровно в 2 похода ходили 5 человек. Сколько человек ходило только в один поход?

   Ответ. 3.

   Решение. Выдадим каждому участнику жетон за каждый поход, в котором он принял участие. Тогда всего жетонов $4 \cdot 20 = 80$. С другой стороны, жетонов $4 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 77$ плюс жетоны тем, кто ходил только в один поход. $80 - 77 = 3$, значит три человека ходили только в один поход.

4. Дима, Саша, Коля, Глеб выступили на олимпиаде и заняли первые четыре места. Через год их одноклассникам по обрывочным данным удалось восстановить лишь три факта: «Дима занял первое место или Глеб — третье», «Глеб занял второе место или Коля — первое», «Саша занял третье место или Дима — второе». Кто выступил лучше — Дима или Саша? (Не забудьте обосновать свой ответ.)

   Ответ. Дима.

   Решение. Если Дима занял первое место, то из последнего высказывания следует, что Саша занял третье место, значит, Дима выступил лучше. Если же неверно, что Дима на первом месте, то Глеб обязательно на третьем. Тогда из второго высказывания получаем, что Коля занял первое место. Саша не мог быть на третьем, поэтому из третьего высказывания получаем, что Дима на втором. Значит, Саша на четвертом, и в этом случае опять Дима выступил лучше.

8 класс.

1. Тигра и Винни-Пух пошли в гости к Кристоферу Робину. Сначала Тигра побежал в четыре раза быстрее Винни-Пуха, но, пробежав половину дороги, неожиданно утомился и оставшийся путь прополз со скоростью в два раза меньшей скорости Винни-Пуха. Кто раньше встретился с Кристофером Робином — Тигра или Винни-Пух?

   Ответ. Винни-Пух.

   Первое решение. Если бы Винни-Пух шёл от своего дома, а Тигра полз с полпути (со скоростью в два раза меньшей скорости Пуха), они бы оказались у Кристофера Робина одновременно. Но Пух уже успел преодолеть какую-то часть пути, прежде чем Тигра пробежал свой путь до середины. Значит Пух окажется у Кристофера Робина раньше.

   Второе решение. Пусть скорость Винни-Пуха равна u , длина пути равна $2s$. Пух потратит на дорогу $\frac{2s}{u}$ времени, Тигра — $\frac{s}{4u} + \frac{2s}{u}$, что больше времени Пуха.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

2. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Известно, что биссектриса угла A, медиана, проведённая из вершины B, и высота, опущенная из вершины C, пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

   Решение. Итак, пусть биссектриса AA_1, медиана BB_1 и высота CC_1 пересекаются в точке T. $\angle AC_1C = 90°$, $\angle C_1AC = 60°$, значит $\angle ACC_1 = 30°$. $\angle TAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$. В треугольнике ACT углы TAC и TCA равны, значит он равнобедренный, и медиана TB_1 является также и высотой, значит и BB_1 является высотой. Итак, BB_1 одновременно высота и медиана, значит $\triangle ABC$ равнобедренный с углом BAC равным $60°$, поэтому $\triangle ABC$ равносторонний.

3. В записи двух трехзначных чисел использовано шесть различных цифр. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться их произведение?

   Ответ. 5.

   Решение. Пять нулей достижимы при числах 625 и 480. Действительно, $625 \cdot 480 = 5^4 \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 300000$. Если бы произведение оканчивалось на 6 или более нулей, то оно было бы не меньше миллиона. Но каждое из трёхзначных чисел меньше тысячи, и значит их произведение меньше миллиона. Поэтому больше пяти нулей получить нельзя.

   Комментарий. Только ответ — 1 балл.

   Есть ответ и приведены числа, для которых 5 нулей достигаются — 3 балла.

   Доказано, что 6 и более нулей получить нельзя — 3 балла.

4. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

   Решение. Если сумма чисел первого столбца x, то сумма чисел второго столбца — $4x$, сумма чисел третьего столбца — $16x$, значит сумма чисел во всей таблице — $21x$. Если сумма чисел во второй строке y, то сумма чисел первой строки — $y - 1$, сумма чисел третьей строки — $y + 1$. Значит сумма чисел во всей таблице равна $3y$. Получаем $3y = 21x$, $y = 7x$. Так как x целое число, y делится на 7.

9 класс.

1. На доске были написаны все натуральные числа от 1 до 1000 включительно. Сначала с доски стёрли все числа, делящиеся на 3, затем стёрли все числа, делящиеся на 5. Сколько чисел осталось на доске?

   Ответ. 533.

   Решение. Обсудим сначала, сколько чисел делящихся на n есть среди чисел от 1 до m. Разделим m на n с остатком, $m = nq + r$. Среди чисел от 1 до n ровно одно делится на n, среди чисел от $n+1$ до $2n$ снова ровно одно делится на n. Продолжая эти рассуждения, получим q отрезков длины n, в которых ровно одно делится на n и отрезок длины r, в котором нет чисел, делящихся на n. Итак, среди чисел от 1 до m ровно q чисел делятся на n, где q — неполное частное при делении m на n с остатком.

   Изначально на доске выписаны $a = 333$ числа кратных трём и $b = 200$ чисел кратных пяти. Если мы просуммируем эти два числа, то дважды будут подсчитаны числа, делящиеся на 15. Таких чисел $c = 66$. Значит с доски стёрли $a + b - c$ чисел и на доске останутся $1000 - (a + b - c) = 1000 - a - b + c = 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$ числа.

   Комментарий. Только ответ — 2 балла.

   Правильная структура решения, но найденные автором решения числа a, b или c отличаются от истинных значений на ± 1 — 4 балла.

   Замечание. Не снижать баллы, если числа a, b и c предъявлены без объяснения.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Оказалось что $A_1B_1 = A_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности. Треугольники IA_1B_1 и IA_1C_1 равны по трём сторонам, значит $\angle A_1IB_1 = \angle A_1IC_1$. В четырёхугольнике CB_1IA_1 углы IA_1C и CB_1I равны 90° так как A_1I и B_1I есть радиусы, проведённые в точки касания. Значит $\angle BCA = \angle A_1CB_1 = 180^\circ - \angle A_1IB_1$. Аналогично, для четырёхугольника BA_1IC_1 выполнено $\angle ABC = \angle C_1BA_1 = 180^\circ - \angle A_1IC_1$. Значит $\angle BCA = 180^\circ - \angle A_1IB_1 = 180^\circ - \angle A_1IC_1 = \angle ABC$ и треугольник ABC равнобедренный.

3. На одной диагонали шашечной доски 10×10 стоит десять шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?

   Ответ. Нет.

   Решение. Занумеруем горизонтали последовательно числами от нуля до девяти. Сумма номеров горизонталей, занимаемых шашками, не меняет свою четность после каждого хода, так как из неё вычитается число 2. В начальной позиции она была нечетна $(0 + 1 + \ldots + 9 = 45)$, а в конечной — равна нулю. Поэтому получить из начальной позиции конечную невозможно.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

4. На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине — произведения чисел на трёх гранях с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма в вершинах равна 70.

   Ответ. 14.

   Решение. Если сложить пары чисел на противоположных гранях и эти три суммы перемножить, получится сумма в вершинах. Действительно, $abc + acy + ayz + azb + xbc + xcy + xyz + xzb = (a + x)(bc + cy + yz + zb) = (a + x)(b + y)(c + z)$, где пары (a, x), (b, y) и (c, z) отвечают противоположным граням куба. $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, поэтому получаем равенство $(a+x)(b+y)(c+z) = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Каждая из скобок не меньше двух, значит значения скобок совпадают с числами 2, 5 и 7. Сумма чисел на гранях равна сумме скобок, и значит равна $2 + 5 + 7 = 14$.

   Комментарий. Только ответ — 1 балл.

   Замечание. Если Участник будет перебирать варианты расположения чисел, то решение будет правильным только в том случае, если он переберёт *все* возможные варианты.

10 класс.

1. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на пять, в записи которых есть хотя бы одна нечётная цифра?

   Ответ. 1700.

   Решение. Если число делится на 5, то его последняя цифра либо 5, либо 0. Пусть a — количество нужных нам чисел, оканчивающихся на 5, b — количество нужных нам чисел, оканчивающихся на 0.

   У чисел, оканчивающихся на 5 уже есть нечётная цифра, значит остальные разряды могут быть любыми. В старшем разряде может стоять любая цифра от 1 до 9, в оставшихся — любая цифра от 0 до 9. Значит $a = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Можно также просто сказать, что при отбрасывании последней пятерки может остаться любое трёхзначное число, а их ровно 900.

   Рассмотрим трёхзначные числа, в записи которых есть только чётные числа, пусть их c штук. $c = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, так как в старшем разряде у таких чисел может стоять ненулевое чётное (их четыре), а в остальных — любое чётное (их ровно пять).

   Понятно что b совпадает с числом трёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечётная цифра. Всего трёхзначных чисел равно 900, значит $b = 900 - c = 800$.

   Итак, всего интересующих нас чисел $a + b = 900 + 800 = 1700$.

2. a, b и c — ненулевые целые числа. Известно, что $a+b+c = 0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ делится на abc.

   Решение. $c = -a - b$, значит $c^3 = (-a - b)^3 = -(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$, $a^3 + b^3 + c^3 = -3(a^2b + ab^2) = -3ab(a + b) = 3abc$, откуда следует делимость.

3. Каждый из квадратных трёхчленов $P_1(x) = x^2 + px + 1$ и $P_2(x) = x^2 + x + p$ имеет корни. Докажите, что трёхчлен $Q(x) = x^2 + (p - 2)x + 1$ имеет корень.

   Решение. Предположим, что $Q(x)$ не имеет корней. Тогда его дискриминант отрицателен: $(p-2)^2 - 4 = p^2 - 4p < 0$. Так как P_1 и P_2 имеют корни, их дискриминанты неотрицательны: $p^2 - 4 \geqslant 0$ и $1 - 4p \geqslant 0$. Сложив эти неравенства, мы получаем $p^2 - 4p - 3 \geqslant 0$, $p^2 - 4p \geqslant 3 > 0$ — противоречие.

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CH. В полученных треугольниках CHB и CHA построили биссектрисы HT и HP соответственно. Докажите, что угол PTH равен углу CBA.

   Первое решение. Угол THP прямой, так как равен сумме двух половин прямого угла. Поэтому $\angle TCP + \angle THP = 180°$, значит четырёхугольник $CTHP$ вписанный и $\angle PTH = \angle HCP = 90° - \angle HCB = \angle CBA$.

   Второе решение. Треугольники CBH и CHA подобны, значит все их соответственные элементы относятся одинаково. Поэтому $\frac{HP}{HT} = \frac{CA}{CB}$. Угол THP прямой, так как равен сумме двух половин прямого угла. Итак, треугольники THP и BCA подобны и $\angle PTH = \angle CBA$.

11 класс.

1. Малыш и Карлсон разделили прямоугольный торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части, при этом разрезы параллельны сторонами торта. Оказалось, что все части различны по величине. Карлсон взял себе одну наименьшую часть и одну наибольшую часть, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что куски Карлсона не имеют общей стороны.

   Решение. Пусть одна из сторон торта разделилась на части a и b, $a \geqslant b$, перпендикулярная ей сторона — на части c и d, $c \geqslant d$. Но тогда очевидны неравенства $ac > ad$, $ac > cb$, $ad > bd$, $cb > bd$ (все равенства исключены условием задачи). Значит часть со сторонами a и c — наибольшая, часть со сторонами b и d — наименьшая. Понятно, что они не граничат по стороне.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ — иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

   Ответ. Да.

   Решение. Искомым является, например, многочлен $P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2) + x$, так как сумма иррационального числа $\sqrt{2}(n-1)(n-2)$ $(n \neq 1, 2)$ и целого числа n — иррациональна.

   Замечание. Возможны другие примеры многочлена.

3. В окружности проведены две равные по длине хорды AB и CD, пересекающиеся в точке T. Докажите, что $(AT - TC) \cdot (AT - TD) = 0$.

   Решение. Докажем, что либо $AT = TC$, либо $AT = TD$. Треугольники ATC и DTB подобны ($\angle ATC = \angle BTD$ так как они вертикальные, $\angle CAT = \angle TDB$, так как они вписанные, опирающиеся на одну дугу). Обозначим $a = AT$, $b = TC$, и пусть коэффициент подобия ATC и DTB равен k. Тогда $TD = ka$, $TB = kb$. Так как $AB = CD$, то $a + kb = b + ka$, $a(k-1) = b(k-1)$. Если $k \neq 1$, то $a = b$, то есть $AT = TC$, если $k = 1$, то $DT = ka = a = AT$.

4. На доске написаны числа от 1 до 20. Разрешается, выбрав любые два числа, стереть их, а вместо них записать на доску их разность (из большего вычитается меньшее). При этом на доске не должны появляться равные числа. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое наименьшее число может остаться на доске?

   Ответ. 2.

   Решение. Операция $a, b \to b - a$ сохраняет чётность суммы чисел, записанных на доске. Действительно, $a+b$ в сумме заменяется на $a-b$, значит сумма изменяется на $2b$ — чётное число. В начале сумма всех чисел была чётна, поэтому в конце может остаться число не меньшее 2 (0 получится не может, ибо тогда на предпоследнем шаге на доске написаны два равных числа).

   Покажем, как получить 2: $1, 2 \to 1$; $18, 20 \to 2$; $1, 2 \to 1$; $17, 19 \to 2$; $\ldots$; $6, 8 \to 2$; $1, 2 \to 1$; $5, 7 \to 2$; (остались числа 1, 2, 3, 4); $1, 2 \to 1$; $1, 3 \to 2$; $2, 4 \to 2$.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

   Приведён ответ, и показано как его получить — 2 балла.

   Доказано, что в конце обязательно будет чётное число — 4 балла.