

Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (5 задач).

Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство

$$\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x , удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу $(-70; 34)$.

Решение. Обозначив $t = 2^{1+\sqrt{x-1}}$, получим

$$\frac{2t - 24}{t - 8} \geq 1 \iff \frac{t - 16}{t - 8} \geq 0 \iff t \in (-\infty; 8) \cup [16; +\infty).$$

Отсюда либо $2^{1+\sqrt{x-1}} < 2^3$, $\sqrt{x-1} < 2$, $x \in [1; 5)$, либо $2^{1+\sqrt{x-1}} \geq 2^4$, $\sqrt{x-1} \geq 3$, $x \in [10; +\infty)$. Таким образом, решение неравенства $x \in [1; 5) \cup (10; +\infty)$. Искомая сумма

$$1 + 2 + 3 + 4 + (10 + 11 + 12 + \dots + 33) = 10 + \frac{10 + 33}{2} \cdot 24 = 526.$$

□

Ответ: 526.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x + 5(x - 2\pi)^2 \cos x + 5x^2 + 20\pi^2 = 20\pi x.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; 6\pi]$, и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^4 x + 5(x - 2\pi)^2(\cos x + 1) = 0,$$

левая часть которого неотрицательна. Поэтому $\sin x = 0$ и $(x - 2\pi)^2(\cos x + 1) = 0$. Поэтому решение уравнения: $x = 2\pi$ и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. На отрезок $[-\pi; 6\pi]$ попадает значения $-\pi$, π , 2π , 3π , 5π , сумма которых равна $10\pi \approx 31,4159\dots$ В ответ записываем 31,42.

□

Ответ: 31,42.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC взята точка M так, что площади треугольников ABM и BCM составляют треть и четверть площади треугольника ABC соответственно. Найти BM , если $AM = 60$ и $CM = 70$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Решение. Обозначив $AB = c$, $BC = a$, получим

$$\begin{cases} (c - \frac{c}{4})^2 + (\frac{a}{3})^2 = 60^2, \\ (\frac{c}{4})^2 + (a - \frac{a}{3})^2 = 70^2. \end{cases}$$

Решаем систему и находим $BM = (\frac{a}{3})^2 + (\frac{c}{4})^2 = \frac{100^2}{7}$. Поэтому $BM = \frac{100}{\sqrt{7}}$. В ответ записываем ближайшее целое.

□

Ответ: 38.

4. Первая бригада рабочих делает асфальт на одном участке дороги, а вторая бригада, в которой на 6 рабочих больше, — на другом, площадь которого втрое больше. Производительность всех рабочих одинакова. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее? Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Если в первой бригаде n рабочих, площадь первого участка равна S , а производительность одного рабочего равна x , то условие задачи запишется в виде $\frac{S}{nx} < \frac{3S}{(n+6)x}$, откуда следует $\frac{1}{n} < \frac{3}{n+6}$, и $n > 3$. Таким образом, наименьшим возможным n является 4. □

Ответ: 4.

5. Найдите все a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. При необходимости округлите его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Решение. Так как $2y = a - x$, то из первого уравнения получим:

$$x^2 + (a - x)^2 = 1 \iff 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение при $\frac{D}{4} = 2 - a^2 = 0$. Значит, $a = \pm\sqrt{2}$, наименьшее значение равно $-\sqrt{2} \approx -1,414214\dots$ □

Ответ: $-1,41$.
