Условия, решения, критерии 7 класс

№1

В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.

Ответ: 70.

Решение. Разделим мысленно все ряды на два типа: в первом лжецов и рыцарей поровну, а во втором нет. Ясно, что в рядах 1-го типа утвердительный ответ дают рыцари, а в рядах 2-го типа лжецы. Но в рядах первого типа суммарно сидит столько же лжецов, сколько и рыцарей. Поэтому число утвердительных ответов равно числу лжецов.

Критерии.

- Утверждается, что возможен только один вариант рассадки;

+/2 При переборе случаев один из случаев рассадки пропущен;

+ Полностью верное решение.

№2

Имеется пять гирь различного веса, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что две самые тяжёлые гири весят в два раза больше остальных, а три самые тяжёлые гири весят в восемь раз больше остальных. Найдите наименьшее возможное значение суммарного веса всех гирь.

Ответ: 27.

Пример. 11, 7, 6, 2, 1 или 10, 8, 6, 2, 1.

Оценка. Упорядочим веса $a > b > c > d > e$. Тогда по условию

$a+b=2(c+d+e),\quad a+b+c=8(d+e)$. Тогда $d+e\geq 3 \Rightarrow a+b+c\geq 24 \Rightarrow a+b+c+d+e\geq 27$.

Критерии.

- Алгебраические соотношения между весами наборов не выписаны верно.

-/+ Алгебраические соотношения между весами наборов выписаны верно, но дальнейших продвижений нет; либо только пример без оценки.

+/2 В условии пропущено слово «различных», и задача решается в таком понимании; либо присутствует только оценка.

+/- Арифметическая ошибка при соблюдении логики решения.

+. В примере не указаны точные значения веса двух самых больших гирь, но указано, что их сумма 18. Не указана связь между минимальностью веса двух самых лёгких гирь и минимальностью всех гирь;

+ Полное решение.

№3

Имеется дробь 1/n. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

Решение. Нет, не стоит. Через x минут дробь $1/n$ превратится в дробь $(1+x)/(n+x)$. Чтобы эта дробь оказалась сократимой, нужно, чтобы её числитель делился на какой-нибудь делитель числа n-1. По условию через 1000 минут получится сократимая дробь $1001/(n+1000)$. Значит, n-1 делится на какой-то делитель числа 1001. Тогда n-1 делится на один из простых делителей p=7, 11, 13. Тогда уже через p-1 шаг дробь окажется сократимой.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Процесс рассматривается на примерах, при этом идея разложения на простые множители отсутствует либо используется некорректно.

-/+ Перепутаны понятия сократимости и делимости нацело. Либо допущены ошибки в работе с прямым и обратным утверждением.

+/2 Условие сократимости не сформулировано.

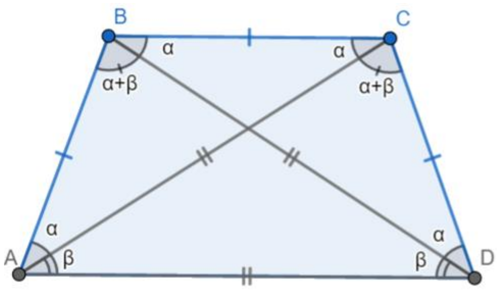
+/- Число 1001 неправильно разложено на простые множители, но логика решения соблюдена.

\+ Полное решение.

№4

В выпуклом четырёхугольнике ABCD выполнено AB=BC=CD, и каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Найдите углы четырёхугольника. (Ответ нужно выразить в градусах).

Ответ: $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{C} = \mathbf{72}^\circ$ и $\angle B = \angle C = 108^\circ$.



В условии сказано, что каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Тогда существует три возможности: обе диагонали равны AB; одна из диагоналей равна AB, а другая — AD; обе диагонали равны AD.

В выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей строго больше суммы противоположных сторон по неравенству треугольника. Таким образом, $AC + BD > AB + CD = 2AB$ и $AC + BD > BC + AD = AB + AD$. Следовательно, первые три случая невозможны и обе диагонали равны AD. Тогда треугольники ABC и BCD равны по трем сторонам и являются равнобедренными. Откуда $\angle CAB = \angle BCA = \angle CBD = \angle CDB = \alpha$. Треугольники ABD и CDA равны по трем сторонам и являются равнобедренными. Значит, $\angle BAD = \angle ABD =$

$\angle CDA = \angle DCA = \alpha + \beta$. По сумме углов треугольников получаем, что $2\alpha + 3\beta = 180°$ и $4\alpha + \beta = 180°$. Таким образом, $\alpha = \beta = 72°$.

Критерии.

Есть три принципиально разных случая: обе диагонали равны AB (1), ровно одна диагональ равна AB (2), обе диагонали равны AD (3).

- Ни один из случаев не разобран полностью.

-. Либо только (1), либо только (2).

-/+ Либо только (3), либо только (1) и (2).

+/- Отсутствие (1) либо (2) случая.

\+ Полное решение.

№5

Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена число 2, сторона с двумя синими вершинами помечена число ½, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

Ответ. ½.
Решение. Если мы поменяем цвета двух соседних вершин разного цвета, то рассматриваемое произведение не изменится. Это показывает рассмотрение четырёх возможных случаев: ККСК, СКСК, ККСС и СКСС. Значит, можно собрать одноцветные вершины в один блок, после чего произведение станет равно ½. Значит, таким оно было изначально.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Без каких-либо объяснений утверждается, что отрезков с ½ на 1 больше, чем отрезков с 2.

-/+ Используется идея перехода от фиксированного очевидного состояния к произвольному, но при этом изменение произведения не отслеживается. Или наоборот: переход произведён корректно, но исходное состояние не исследовано.

+/2 используется идея перестановки двух элементов, но разобран только тривиальный случай.

+/- Используется идея перестановки двух элементов, но разобран только один (существенный) из четырёх случаев.

\+ Полное решение.

№6

Имеется клетчатая доска (2n+1)× (2n+1). В центральной клетке сидит таракан. Семиклассник Семён хочет убить таракана и кидает в него камешками. Пока камешек летит, таракан может перебежать в любую соседнюю по стороне клетку. Если камешек попал на пустую клетку (без таракана), то на эту клетку таракан заползать больше никогда не будет. Как только таракан попадает на край доски, Семён утрачивает к нему интерес и перестаёт кидаться камешками. Найдите наименьший размер доски, при котором Семён гарантированно добьётся своего.

Ответ. n=4.

Решение. Для начала докажем, что при n=4 (доска 9×9) Семён сможет этого добиться. Рассмотрим вертикали и горизонтали, расположенные в одной клетке от края доски (это 2-я и 8-я горизонтали и вертикали b и h). Назовём их критическими рядами, а их пересечения (клетки $b2$, $h2$, $b8$ и $h8$) – узлами.

Докажем следующие два утверждения.

1) Семён может добиться следующего: если таракан пришёл на критический ряд, то оба узла на этом ряду уже заняты камнями.
2) Если таракан пришёл на критический ряд, оба узла которого уже заняты камнями, то Семён может не дать таракану выйти с этого ряда на соседний с ним край.

Начнём с утверждения 2: пусть таракан на критическом ряду. Тогда Семён каждый раз кидает камешек на соседнюю с тараканом клетку края (если она ещё свободна – если занята, он может кидать куда хочет). Такая клетка только одна везде, кроме узлов, а узлы уже заняты. Следовательно, с этого ряда таракан на край выйти не сможет.

Теперь докажем утверждение 1.

Пусть Семён первым ходом кидает камень в клетку b2, а дальше, если таракан не на критическом ряду, занимает любой свободный узел того ряда, в сторону которого таракан последний раз полз (или любой другой свободный узел, если в этом ряду уже оба узла заняты; если заняты все четыре узла, а таракан всё ещё не на критическом ряду, Семён может кидать куда угодно на доске).

Чтобы добраться до своего первого критического ряда, таракан должен сделать хотя бы три хода в его сторону; следовательно, хотя бы уже два раза он полз в сторону этого ряда (но не достигал его), что означает, что на этом ряду заняты оба узла (либо их занимали после этих двух ходов, либо после какого-то из этих ходов их не занимали, так как они уже были заняты). Заметим, что, так как прошло не менее трёх ходов, хотя бы три узла уже заняты.

По утверждению 2, таракан не может выйти с этого ряда на край. Пусть он пытается ползти с него внутрь (от края). Тогда он больше не на критическом ряду (иначе он начинал бы с узла, а узлы этого ряда заняты), и следующим ходом закрывается четвёртый узел (если он ещё не занят), то есть на любом критическом ряду, куда ещё мог бы прийти таракан, уже будут заняты оба его узла. Утверждение 1 доказано.

Объединяя утверждения 1 и 2, получаем, что Семён может не дать таракану выйти на край ни с какого критического ряда, т.е. выигрывает.

Заметим, что при n>4 Семён может применить ту же стратегию, не давая таракану выйти из центрального квадрата 7*7, т.е. тоже выигрывает.

Докажем, что при n=3 (доска 7*7) таракан может спастись.

Лемма. Пусть таракан в одной клетке от края, и в прямоугольнике 2*k, содержащем таракана и один из углов, нет ни одного камня. Тогда таракан может выйти на край.

Доказательство. Если Семён кинет камень куда угодно, кроме соседней клетки края, таракан ползёт туда и выигрывает; иначе таракан ползёт вдоль длинной стороны прямоугольника и оказывается в той же ситуации при k на единицу меньшем. Когда k достигает 2, этот ход таракана тоже приведёт его к краю.

Действительно, предположим, что первым ходом Семён кидает камень не ниже и не левее центра (этого всегда можно добиться, повернувшись относительно доски), то есть не ниже 4-горизонтали и не левее вертикали d.

Тогда таракан ползёт вниз, на клетку d3.

Если после этого Семён кидает камень куда угодно, кроме клеток d2 и d1, то таракан ползёт на d2; иначе он ползёт на c3.

Если таракан оказался на d2, то на нижних двух горизонталях не более одного камня, причём не на d1; тогда либо снизу и справа, либо снизу и слева от таракана камней нет, и выполнено условие леммы.

Пусть таракан на c3. Тогда на трёх левых вертикалях нет ни одного камня (второй камень был на вертикали d, а первый не левее); если после этого Семён кидает камень на b3 или a3, то таракан ползёт на c2, а если куда-либо ещё, то на b3.

Наконец, если таракан оказался на c2, то слева и снизу от него камней нет, и он выигрывает по лемме; если же он оказался на b3, то на двух левых вертикалях не более одного камня, причём не на *a*3, то есть либо снизу и слева, либо сверху и слева от таракана камней нет, и он опять же выигрывает по лемме.

Критерии.

\+ Полное решение.

+/2 Оценка без примера.

-/+ Присутствует идея рассмотрения угловых клеток, но в изложении оценки есть логические ошибки.

Условия, решения, критерии 8 класс

№1

См. задачу 7 класс, №1.

Критерии.

\- Утверждается, что возможен только один вариант рассадки;

+/2 При переборе случаев один из случаев рассадки пропущен;

\+ Полностью верное решение.

№2

См. задачу 7 класс, №3.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Процесс рассматривается на примерах, при этом идея разложения на простые множители отсутствует либо используется некорректно.

-/+ Перепутаны понятия сократимости и делимости нацело. Либо допущены ошибки в работе с прямым и обратным утверждением.

+/2 Условие сократимости не сформулировано.

+/- Число 1001 неправильно разложено на простые множители, но логика решения соблюдена.

\+ Полное решение.

№3

Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см^2, а объём увеличится на 5 см^3. Может ли он оказаться прав? Замечание. Прямоугольный параллелепипед – пространственная фигура, напоминающая куб, но, рёбра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объём равен произведению дли трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

Ответ: нет, не может.

Решение. Объём параллелепипеда с рёбрами *a, b, c* равен X=*abc*, а его полная поверхность равна 2Y=2(*ab*+*ca*+*bc*). Обозначая Z=*a*+*b*+*c*, получаем:

$$5=(a+1)(b+1)(c+1)-abc=Y+Z+1\Rightarrow Y+Z=4;$$

$$9=2\big((a+1)(b+1)+(c+1)(a+1)+(b+1)(c+1)-(ab+ac+bc)\big)=4Z+6\Rightarrow$$

$$Z=\frac{3}{4},\ Y=\frac{13}{4}$$

Но все рёбра меньше 1 и Y<3. Противоречие.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо содержательная мотивация.

-/+ Найдена только одна из двух рассматриваемых величин (либо только полная поверхность, либо только длина рёбер). Либо при двух найденных величинах дан неправильный ответ.

+/2 Найдены обе величины. Правильный ответ дан, но не мотивирован.

+/- Вычислительная ошибка, повлиявшая на дальнейшую логику, но не очень существенно. Либо использование метода Штурма без необходимых пояснений.

+. Вычислительная ошибка в конце решения, не повлиявшая на логику рассуждений.

\+ Полное решение.

№4

На стороне ВС параллелограмма ABCD выбрана точка М так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников ABM, AMD, CDM. Найдите углы параллелограмма. (Ответ нужно выразить в градусах).

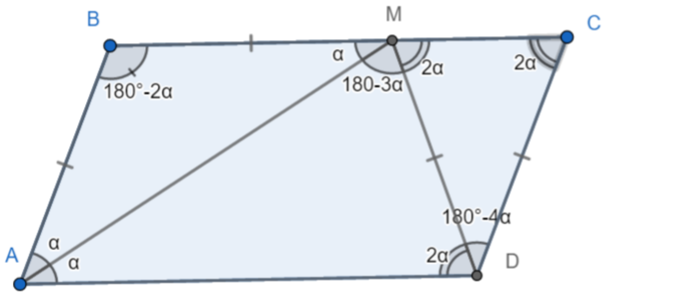
Ответ. Значения меньших углов параллелограмма бывают: $\angle A = \frac{360^\circ}{5}$, $\angle A = \frac{360^\circ}{7}$ или $\angle A = 90^\circ$ (углы параллелограмма совпадают).

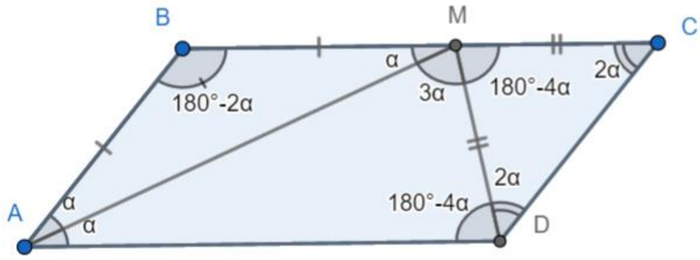
Решение. Без ограничения общности можно считать, что $\angle B \geq 90^\circ$. Тогда, поскольку треугольник ABM — равнобедренный, $\angle BAM = \angle BMA = \alpha$. Более того, $\angle MAD = \alpha$ в силу параллельности BC и AD. Следовательно, $\angle A = \angle C = 2\alpha$. То есть для того, чтобы решить задачу, достаточно найти угол α. По условию треугольник MCD — равнобедренный. Отсюда возникают три случая: $MD = DC$, $MC = MD$ и $MC = CD$. Случаи разбираются одинаково, поэтому разберем полностью только первый из них, а в остальных просто запишем возможные значения для α.

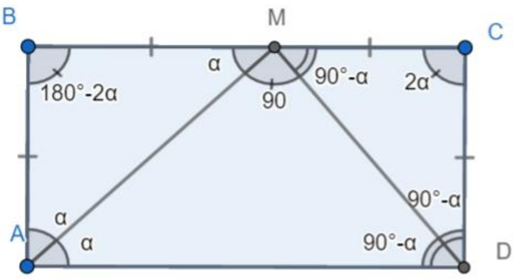
Итак, углы на рисунке расставлены в соответствии со сделанными предположениями. Теперь, треугольник AMD по условию равнобедренный. Его углы по предположению — это $\alpha, 2\alpha$ и $180^\circ - 3\alpha$. $\alpha \neq 2\alpha$, поскольку $\alpha > 0^\circ$

$\alpha \neq 180^\circ - 3\alpha$, поскольку в этом случае треугольник MCD вырождается.

Таким образом, $2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$ и $\alpha = 36^\circ$. Во втором случае $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$. В третьем случае $\alpha = 45^\circ$.







Критерии.

- В рассуждениях отсутствует содержательная мотивация.

-. Только один ответ с примером.

-/+ Разобраны не все случаи.

+/- Несколько арифметических ошибок или не проверен на существование случай, которого на самом деле нет.

+. Одна арифметическая ошибка.

\+ Полное решение.

№5

См. задачу 7 класс, №5.

Критерии.

- Ответ либо неверный, либо отсутствует какая-либо мотивация.

-. Без каких-либо объяснений утверждается, что отрезков с ½ на 1 больше, чем отрезков с 2.

-/+ Используется идея перехода от фиксированного очевидного состояния к произвольному, но при этом изменение произведения не отслеживается. Или наоборот: переход произведён корректно, но исходное состояние не исследовано. Или: используется идея перестановки двух элементов, но разобран только тривиальный случай.

+/- Используется идея перестановки двух элементов, но разобран только один (существенный) из четырёх случаев.

\+ Полное решение.

№6

См. задачу 9-6.

Критерии.

-. Частные верные утверждения, связанные с оценкой на число наборов, не приводящие к правильному ответу.

-/+ Верный пример без мотивации.

\+ Полное решение.