Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк. Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. На востоке Византии в IV-V веках под влиянием религиозной мысли появилась альтернативная модель Земли, несмотря на уже имевшуюся с античных времён идею её шарообразности: Земля представляет из себя гору, помещённую в нечто вроде сундука (Космá Индикоплéвст). Будем считать, что сундук представляет из себя куб с одинаковыми по массе гранями и длиной ребра 10 тыс. км; вне сундука пустота. Гора представляет из себя пирамиду с вершиной в центре куба. Основание горы совпадает с одной из граней куба. Гора имеет однородную по своему объёму плотность. Какова должна быть эта плотность для того, чтобы на вершине горы ускорение свободного падения было равно $g = 10$ м/с^2? Считать, что работает закон всемирного тяготения Ньютона, гравитационная постоянная $G = 6.7 \cdot 10^{-11}$м^3/(с$^2 \cdot$ кг).

Задача 2. При расширении водяного пара из состояния 1 в состояние 2 по изотерме газ совершает работу 100 Дж. Если же сначала газ будет расширяться по изобаре, а потом по адиабате – в результате чего также перейдёт из состояния 1 в состояние 2, – то он совершит работу 171,8 Дж. Какую работу совершит газ, если сначала будет изобарически расширяться, а после изохорно охлаждаться, перейдя снова из состояния 1 в состояние 2? Пар считать идеальным газом.

Задача 3. Дан длинный тонкий прямой стержень, однородно заряженный вдоль своей длины. Противоположно заряженная маленькая частица должна вращаться в плоскости, ортогональной стержню, с угловой скоростью ω для того, чтобы оставаться на расстоянии 1 см от неподвижного стержня. Пусть теперь система из двух параллельных стержней, разделенных расстоянием 2 см и обладающих той же погонной плотностью заряда на каждом из них, вращается с той же угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной стержням и находящейся посередине между ними. Найдите все точки, в которых та же заряженная маленькая частица может оставаться неподвижной относительно вращающихся стержней, если к ней не прикладывать никаких дополнительных внешних сил. Силами гравитационного и магнитного взаимодействий пренебречь.

Задача 4. Миражи появляются из-за неоднородности распределения показателя преломления в атмосфере. Пусть показатель преломления атмосферы $n(z)$ однороден по горизонтали, а по вертикали имеет зависимость: $n(z) = 1 + \Delta n$ при $z < H$, $n(z) = 1 + 2\Delta n/3 + \Delta n\,(H + h - z)/3h$ при $H < z < H + h.$ На высотах $z > H + h$ показатель преломления увеличивается и постепенно возвращается на значение у поверхности Земли. Константа $\Delta n = 3 \cdot 10^{-4}$, высоты $H = 200$ м$,$ $h = 200$ м. Каково минимальное расстояние по горизонтали, на котором предмет, расположенный на поверхности Земли, будет виден расположенным в небе? Под каким углом к горизонту он будет виден на этом расстоянии?

Задача 5. Известно, что для вывода спутника на определённую орбиту совершают такой алгоритм действий: сначала его выводят на круговую околоземную орбиту. Затем на короткое время включают первый раз двигатель, в результате чего спутник выходит на эллиптичную орбиту. Наконец, в точке максимального отдаления эллиптической орбиты от Земли ещё раз на короткое время включается двигатель, и спутник выходит на круговую орбиту. Считайте, что оба раза включается один и тот же двигатель, у которого тяга остаётся постоянной во времени, а изменением массы спутника можно пренебречь. Оцените силу тяги двигателя и длительность его второго включения, необходимую для того, чтобы выйти на геостационарную орбиту (орбиту, на которой период оборота равен 1 суткам). Известно, что в первый раз маневровый двигатель включали на 100 секунд. Спутник является спутником связи типа ГЛОНАСС.

11 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). На востоке Византии в IV-V веках под влиянием религиозной мысли появилась альтернативная модель Земли, несмотря на уже имевшуюся с античных времён идею её шарообразности: Земля представляет из себя гору, помещённую в нечто вроде сундука (Космá Индикоплéвст). Будем считать, что сундук представляет из себя куб с одинаковыми по массе гранями и длиной ребра $10\,\text{тыс. км}$; вне сундука пустота. Гора представляет из себя пирамиду с вершиной в центре куба. Основание горы совпадает с одной из граней куба. Гора имеет однородную по своему объёму плотность. Какова должна быть эта плотность для того, чтобы на вершине горы ускорение свободного падения было равно $g = 10\ \text{м/с}^2$? Считать, что работает закон всемирного тяготения Ньютона, гравитационная постоянная $G = 6.7\cdot 10^{-11}\text{м}^3/(\text{с}^2\cdot\text{кг})$.

Решение: Сначала заметим, что поскольку вершина горы находится в центре симметричного куба, то стенки куба не создают гравитационной силы на вершине горы.

Далее, пусть массовая плотность материала горы равна ρ. Согласно условию задачи, высота горы равна $h = 5\,\text{тыс. км}$. Из соображений симметрии заключаем, что ускорение свободного падения, создаваемое горой, на её вершине будет направлено перпендикулярно её основанию. Ведём декартову систему координат с началом на вершине горы, ось z направим нормально к основанию горы и назовём вертикалью. Разобьём гору на горизонтальные слои малой толщины Δz. Покажем, что вклад в ускорение свободного падения от каждого слоя одинаков. Действительно, возьмём элемент слоя на уровне z в форме прямоугольного параллелепипеда с горизонтальными размерами $\Delta x, \Delta y$ на расстоянии $\sqrt{x^2+y^2}$ от вертикали; для более ясного геометрического представления будем считать, что этот параллелепипед плоский, $\Delta x, \Delta y \gg \Delta z$. Вклад в z-компоненту ускорения на вершине горы от этого элемента равен

$$\Delta g_z = \frac{G\,\Delta M}{x^2+y^2+z^2}\cos\theta, \qquad \Delta M = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z, \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Здесь ΔM – масса элемента объёма горы, $\cos\theta$ – угол между вертикалью и линией, соединяющей элемент горы и её вершину. Заметим теперь, что комбинация

$$\frac{\Delta x\,\Delta y\,\cos\theta}{x^2+y^2+z^2}$$

есть телесный угол Δo, под которым видно основание параллелепипеда с вершины горы. Таким образом, вклад от элемента равен

$$\Delta g_z = G\rho\,\Delta\text{o}\,\Delta z$$

Весь слой виден под телесным углом в $1/6$ от полного телесного угла (поскольку это телесный угол, под которым из центра куба видна одна из его граней, а их 6), то есть $4\pi/6 = 2\pi/3$. Таким образом, вклад от целого слоя толщиной Δz равен $(2\pi/3)\,G\rho\,\Delta z$. Вклад от всей горы равен

$$g_z = \frac{2\pi G\rho h}{3}, \qquad \rho = \frac{3g}{2\pi G h}.$$

Подставляя численные значения, приходим к тому, что плотность равна $\rho \approx 14000$ кг/м^3.

То, что Земля имеет форму шара, было известно уже Аристотелю (IV век до н.э.). Вслед за ним Аристарх Самосский на основании астрономических наблюдений сделал попытку соотнести размеры Земли, Луны и Солнца (все три принимались шарообразными телами). В результате идея о шарообразности Земли стала наиболее распространённым представлением о форме Земли в античном мире, см., например, [1, Часть I, Глава 7]. Однако с наступлением христианской эры, особенно в восточной части Римской империи, интересы общества сместились в религиозно-идеологическую область. Теоретическое осмысление естественно-научных данных практически остановилось, хотя технология и не стояла на месте. Наоборот, уже имевшиеся теоретические представления о шарообразной форме Земли в Византии во многом уступили место ненаучным представлениям. Одним из соображений, заставивших отвергнуть правильное представление, было идеологическое убеждение о невозможности существования “антиподов” – людей, живущих на противоположное стороне Земли и поэтому перевёрнутых относительно живущих в Византии. Более подробно об этом см., например, [2].

Для современной физики, по-видимому, наиболее ценным будет следующий вывод из этой истории: физика является наукой экспериментальной, в которой теоретические модели вырабатываются на основе объективных фактов. Именно это является залогом дальнейшего успеха физики в социальном плане; в конечном итоге только в этом случае физики будут продолжать делать открытия, прокладывающие дорогу техническому прогрессу, достигающему каждого человека. В античной греческой культуре не было идеи систематической верификации теорий путём сравнения их предсказаний с экспериментальными данными. Соответственно, не было и системной работы в противоположном направлении – не было выработки новых теоретических моделей, более адекватных реальности и претендующих на всё большую общность. Вопреки этому считалось, что наиболее качественная теория должна быть выведена исключительно из умозрительных построений. Поэтому, когда фокус философского интереса в Византии сместился от природы к мистицизму, античная естественная наука как общественное явление не смогла отбиться от новых идеологем и продолжить своё поступательное развитие.

[1] Стивен Вайнберг. *“Объясняя мир. Истоки современной науки.”* Изд-во Альпина-нон-фикшн, Москва, 2015. ISBN 978-5-9614-4084-3

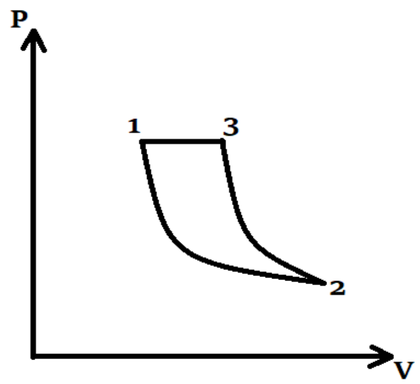
[2] “Культура Византии IV – первая половина VII в. “ Под редакцией Э.В. Удальцова. Изд-во “Наука”, Москва, 1984. Смотри, в частности, Главы 2, 11, 13.

Разбалловка.

Показано, что вектор g направлен вертикально вниз	1 балл
Записан вклад в вертикальную проекцию суммарной силы (или g) от бесконечно малого элемента массы пирамиды	5 баллов
Предложен метод определения вклада в вертикальную проекцию суммарной силы (или g) от плоского слоя (через переход к телесному углу или иным образом)	9 баллов
Вклад от слоев просуммирован и получено выражение для g	4 балла
Получено численное значение для плотности	1 балл
Неправильное решение, сводящееся к отысканию центра тяжести пирамиды и затем применению к нему закона всемирного тяготения, считается правильной оценкой	6 баллов всего

Задача 2. Термодинамика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). При расширении водяного пара из состояния 1 в состояние 2 по изотерме газ совершает работу 100 Дж. Если же сначала газ будет расширяться по изобаре, а потом по адиабате – в результате чего также перейдёт из состояния 1 в состояние 2, – то он совершит работу 171,8 Дж. Какую работу совершит газ, если сначала будет изобарически расширяться, а после изохорно охлаждаться, перейдя снова из состояния 1 в состояние 2? Пар считать идеальным газом.



Решение. Рассмотрим сначала процесс 1-2, представляющий собой изотерму. На изотерме $PV = \text{const}$, поэтому

$$P_1V_1 = P_2V_2 \qquad (1)$$

Работа при изотермическом расширении, численное значение которой задано в условии, равна

$$A_I = A_{12} = P_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 100\ \text{Дж},$$

Далее, рассмотрим процесс 1-3-2. Работа на изобарном процессе 1-3

$$A_{13} = P_1(V_3 - V_1)$$

Работа на 3-2 адиабате:

$$Q_{32} = 0 = A_{23} + \Delta U$$

$$A_{23} = -\Delta U = \frac{\text{i}}{2}(P_3V_3 - P_2V_2) = 3P_1(V_3 - V_1),$$

где $i = 6$ — количество степеней у трёх-атомной молекулы воды. Полная работа 1-3-2, численное значение которой также задано в условии, равна

$$A_{II} = A_{13} + A_{32} = 4P_1(V_3 - V_1) = 171{,}8\ \text{Дж}$$

Выразим теперь промежуточное значение объёма V_3 через значения объёма V_1 и V_2. Процесс 3-2 является адиабатой, значит $PV^{\gamma} = \text{const}$, с γ = (i+2)/i = (6+2)/6 = 4/3. Таким образом,

$$P_3V_3^{\frac{4}{3}} = P_2V_2^{\frac{4}{3}}$$

С учётом уравнения (1) находим, что

$$P_1V_3^{\frac{4}{3}} = P_1V_2^{\frac{1}{3}}V_1, \qquad \text{то есть} \qquad V_3 = V_2^{\frac{1}{4}}V_1^{\frac{3}{4}}.$$

Запишем отношение работы на процессе 1-2 к работе на процессе 1-3-2:

$$\frac{A_I}{A_{II}} = \frac{P_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{4P_1(V_3 - V_1)} = \frac{V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{4\left(V_2^{\frac{1}{4}}V_1^{\frac{3}{4}} - V_1\right)} = \frac{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{4\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right)} = \frac{1}{1.718} = \frac{1}{e-1},$$

где e есть основание натуральной экспоненты. Из этого соотношения легко увидеть, что отношение объёмов в начальной и конечной точках равно

$$\frac{V_2}{V_1} = e^4$$

Наконец, из знания работы, совершённой при изотермическом процессе 1-2, находим

$$P_1V_1 = \frac{A_I}{4} = 25\ \text{Дж}$$

В результате, искомая работа, совершённая при изохорном расширении от V_1 до V_2, равна

$$A_{III} = P_1(V_2 - V_1) = P_1V_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = \frac{A_I(e^4 - 1)}{4} = 1340\text{Дж}.$$

Разбалловка.

Записано выражение для работы в изотермическом процессе 1-2	2 балла
Записано выражение для работы изобарическом процессе	1 балл
Записано выражение для работы в адиабатическом процессе	3 балла
Получено соотношение между объемами в состоянии 1 и 2	9 баллов
Вычислена работа в изотермическом процессе 1-2	1 балл
Записано выражение для работы в совокупности изобарного и изохорного процессов	2 балла
Получен окончательный ответ в численном виде – 2 балла.	2 балла

Задача 3. Электричество и магнетизм - механика.

Задача 3 (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Дан длинный тонкий прямой стержень, однородно заряженный вдоль своей длины. Противоположно заряженная маленькая частица должна вращаться в плоскости, ортогональной стержню, с угловой скоростью ω для того, чтобы оставаться на расстоянии 1 см от неподвижного стержня. Пусть теперь система из двух параллельных стержней, разделенных расстоянием 2 см и обладающих той же погонной плотностью заряда на каждом из них, вращается с той же угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной стержням и находящейся посередине между ними. Найдите все точки, в которых та же заряженная маленькая частица может оставаться неподвижной относительно вращающихся стержней, если к ней не прикладывать никаких дополнительных внешних сил. Силами гравитационного и магнитного взаимодействий пренебречь.

Решение. Сначала определим, как действует один заряженный стержень на заряженную маленькую частицу. Пусть погонная плотность заряда на стержне равна ρ, а заряд частицы равен $-q$, её масса равна m. Электрическое поле имеет аксиально симметричное распределение в пространстве и направлено везде от стержня. Его величина $E(r)$ может быть определена из теоремы Гаусса:

$$2\pi r\, E(r) = 4\pi\rho, \quad \text{то есть} \quad E(r) = \frac{2\rho}{r}.$$

Таким образом, сила притяжения действующая со стороны стержня на частицу, равна $F = 2\rho q/r$. При вращении заряда вокруг стержня по круговой орбите с $r_0 = 1$ см сила притяжения компенсируется центробежной силой $m\omega^2 r$:

$$\frac{2q\rho}{r_0} = m\omega^2 r_0, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{2q\rho}{m\omega^2} = r_0^2.$$

Теперь перейдём к отысканию точек равновесия для системы двух вращающихся стержней. Система, связанная со стержнями, является вращающейся и потому неинерциальной. В ней возникает дополнительная сила, действующая на частицу – сила инерции. Введём декартову систему координат в плоскости, ортогональной стержням. Начало системы расположим посередине между стержнями (относительно оси проходящей через эту точку, происходит вращение), ось Ox направим вдоль отрезка, соединяющего стержни.

Сила инерции должна компенсировать электростатическую силу, действующую на частицу. Поскольку сила инерции направлена по радиус-вектору, то в точках равновесия электростатическая сила должна быть противоположно направлена радиус-вектору. Из соображений симметрии ясно, что такие точки могут находиться только на осях координат.

Самой простоя для нахождения точкой равновесия №1 является начало координат $(0{,}0)$. Двумя другими точками равновесия №2 и №3 являются точки $(\pm x, 0)$, при этом расстояние x удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{r_0^2} = \frac{1}{x + r_0} + \frac{1}{x - r_0} = \frac{2x}{x^2 - r_0^2}.$$

Слева написана центробежная сила (делённая на $m\omega^2$), справа компенсирующие её силы притяжения к обоим стержням (также делённые на $m\omega^2$). Таким образом,

$$x^2 = 3r_0^2, \qquad \text{то есть} \qquad x = \sqrt{3} r_0 = \sqrt{3}\ \text{см}.$$

Далее, есть ещё две точки равновесия №4 и №5 с координатами $(0, \pm y)$. Для этих точек получаем аналогичное уравнение:

$$\frac{y}{r_0^2} = 2\frac{1}{\sqrt{y^2 + r_0^2}} \frac{y}{\sqrt{y^2 + r_0^2}} = \frac{2y}{y^2 + r_0^2},$$

где $y/\sqrt{y^2 + r_0^2}$ есть косинус угла между направлением силы притяжения частицы к стержню и осью Oy. В результате

$$y^2 = r_0^2, \qquad \text{то есть} \qquad y = r_0 = 1\ \text{см}.$$

Найденные точки являются аналогами точек Лагранжа для трёх-мерного случая, когда вместо двух стержней имеются два гравитационного центра притяжений, а скорость вращения ω есть угловая скорость обращения двух гравитационных центров вокруг друг друга. Однако в трёх-мерном случае уравнения, определяющие положения этих точек, оказываются заметно сложнее.

Разбалловка.

Получено соотношение между плотностью заряда стержней, массой частицы, угловой частотой вращения и радиусом вращения	3 балла
Записана центробежная сила во	2 балла

вращающейся системе координат Записаны силы, действующие на частицу, и описано ее движение в выбранной системе координат	
Записана равнодействующая сила, действующая на частицу во вращающейся системе координат, как сумма трёх сил	5 баллов
Записано условие неподвижности частицы относительно стержней	2 балла
Получена точка на оси вращения стержней	1 балл
Получены точки, лежащие на прямой, перпендикулярной стержням и проходящей через них	3 балла
Получены две оставшиеся точки	4 балла

Задача 4. Оптика

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Миражи появляются из-за неоднородности распределения показателя преломления в атмосфере. Пусть показатель преломления атмосферы $n(z)$ однороден по горизонтали, а по вертикали имеет зависимость: $n(z) = 1 + \Delta n$ при $z < H$, $n(z) = 1 + 2\Delta n/3 + \Delta n\,(H + h - z)/3h$ при $H < z < H + h$. На высотах $z > H + h$ показатель преломления увеличивается и постепенно возвращается на значение у поверхности Земли. Константа $\Delta n = 3 \cdot 10^{-4}$, высоты $H = 200$ м, $h = 200$ м. Каково минимальное расстояние по горизонтали, на котором предмет, расположенный на поверхности Земли, будет виден расположенным в небе? Под каким углом к горизонту он будет виден на этом расстоянии?

Решение. Рассматривая преломление луча в атмосфере, можно мысленно разбить её на настолько тонкие слои, что в пределах каждого слоя показатель преломления можно считать однородным. Запишем закон Снелла:

$$n \cos\varphi(z) = \mathrm{const} = (1 + \Delta n)\cos\theta. \qquad (1)$$

Используя закон Снелла, возможно определить траекторию луча. В общем случае уравнение, определяющее эту траекторию, оказывается сложным. Однако в нашем случае есть упрощающие обстоятельства: малость углов и линейная зависимость показателя преломления. Действительно, во-первых, углы малые, поскольку разница между показателем преломления и единицей мала, $1 - n \ll 1$. Тогда

$$n\cos\varphi \approx \big(1 + (n-1)\big)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \approx 1 + (n-1) - \frac{\varphi^2}{2},$$

а закон Снелла (1) можно переписать в приближённом виде

$$\frac{\varphi^2}{2} = \frac{\theta^2}{2} + (n-1) - \Delta n. \qquad (2)$$

Снова используя малость угла φ замечаем, что $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\,\varphi$, то есть

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

Теперь, во-вторых, используем линейность зависимости показателя преломления от высоты и перепишем уравнение (2):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\Delta n}{3h}(z - H) = \frac{\theta^2}{2} \qquad (3)$$

Это уравнение описывает движение частицы массой 1 в гравитационном моле с ускорением свободного падения равным $\Delta n/3h$, направленным противоположно направлению оси Oz, причём роль времени играет горизонтальная координата x. Величина $\theta^2/2$ есть полная энергия системы.

Уравнение (3), напомним, применимо в области $H < z < H + h$. Если луч выходит в область $z > H + h$, то он уже не вернётся к поверхности Земли. Отсюда заключаем, что максимальный угол приходящего луча $\theta_{\max} = \sqrt{2\,\Delta n/3}$. Теперь, если $\theta < \theta_{\max}$, то максимальная высота, которую достигает траектория луча, равна

$$z_{max} - H = \frac{h}{\Delta n/3}\frac{\theta^2}{2}.$$

Горизонтальное расстояние l, которое пройдёт луч, пока проходит через верхний слой атмосферы, равно удвоенному времени свободного падения с нулевой начальной скоростью на высоту $z_{max} - H$, то есть

$$l = 2\sqrt{\frac{2(z_{max} - H)}{\Delta n/3h}} = 2\frac{h}{\Delta n/3}\theta.$$

Полное расстояние между точкой испускания луча и точкой его возвращения на поверхность Земли равно

$$X = 2\left(\frac{H}{\theta} + \frac{h}{\Delta n/3}\theta\right).$$

Минимальное расстояние соответствует минимуму выражения справа, которое достигается при

$$\theta_{\min} = \sqrt{\frac{H}{h}}\sqrt{\Delta n/3} = 0.01 \text{ рад}, \qquad \text{чему соответствует} \qquad z_{\max,\min} - H = \frac{H}{2}.$$

Минимум достигается только если $H < 2h$, в нашем случае это условие выполняется. Само расстояние по горизонтали

$$X_{\min} = \frac{4\sqrt{hH}}{\sqrt{\Delta n/3}} = 80 \text{ км}.$$

Разбалловка.

Исходя из зависимости показателя преломления от высоты, описано	4 балла

движение луча и объяснено, почему он возвращается к поверхности земли	
Записан закон Снелла	2 балла
Получено уравнение траектории луча (либо приведен аналогичные метод, с помощью которого можно определить расстояние, пройденное светом, и угол к горизонту). Из них:	10 баллов
— указано, что углы отклонения от горизонта малы в силу малости Δn	2 балла
— записано разложение $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$	2 балла
— записано приближённое уравнение на распространение луча в слое с линейным профилем показателя преломления	4 балла
— получена параболическая форма траектории луча в слое с линейным профилем показателя преломления	2 балла
Получено расстояние между точками испускания и возвращения луча.	2 балла
Получен угол к горизонту, под которым испускается луч,	2 балла

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Известно, что для вывода спутника на определённую орбиту совершают такой алгоритм действий: сначала его выводят на круговую околоземную орбиту. Затем на короткое время включают первый раз двигатель, в результате чего спутник выходит на эллиптичную орбиту. Наконец, в точке максимального отдаления эллиптической орбиты от Земли ещё раз на короткое время включается двигатель, и спутник выходит на круговую орбиту. Считайте, что оба раза включается один и тот же двигатель, у которого тяга остаётся постоянной во времени, а изменением массы спутника можно пренебречь. Оцените силу тяги двигателя и длительность его второго включения, необходимую для того, чтобы выйти на геостационарную орбиту (орбиту, на которой период оборота равен 1 суткам). Известно, что в первый раз маневровый двигатель включали на 100 секунд. Спутник является спутником связи типа ГЛОНАСС.

Решение. Массу спутника примем $m = 1000$ кг. Рассмотрим первое включение двигателя. Силу его тяги надо направлять по направлению движения спутника. Скорость спутника на околоземной орбите равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{R_з}},$$

где потенциальную энергию в поле тяжести Земли мы записали в виде $U = -m\alpha/r$, а радиус околоземной орбиты примем равным $R_з = 6700$ км. Константу α (если забыта масса Земли) можно найти из условия, что на поверхности Земли (мы пренебрегаем разностью между радиусом Земли и радиусом околоземной орбиты) ускорение свободного падения равно известной величине $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{\alpha}{R_з^2} = g, \quad \alpha = gR_з^2, \quad v_0 = \sqrt{g\, R_з} = 8 \text{ км/с}.$$

Полная энергия спутника, пока он находится на околоземной орбите, равна $E_0 = -m\alpha/2R_з = -mv_0^2/2$. Для того, чтобы эллиптическая орбита имела апогей на расстоянии $R_г = 42000$ км от центра Земли (радиус геостационарной орбиты), надо, чтобы полная энергия спутника стала равной $E_1 = -m\alpha/2a$, где a – длина полуоси эллиптической орбиты. Оценить эту длину можно так, что $2a = R_г$, поскольку $R_г$ значительно превышает $R_з$. Значит, при первом включении маневрового двигателя кинетическая энергия спутника должна измениться на $E_1 - E_0$, то есть скорость сразу после выключения двигателя должна удовлетворять уравнению

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = E_1 - E_0,$$

или приближённо (пренебрежём E_1 по сравнению с $-2E_0$)

$$v_1 = \sqrt{2}v_0.$$

Работа двигателя с тягой F в течении $t_1 = 100$ с привела к изменению импульса двигателя

$$Ft_1 = m(v_1 - v_0) = m\left(\sqrt{2} - 1\right)v_0 \approx 0.4v_0, \quad \text{то есть} \quad F = \frac{m\left(\sqrt{2}-1\right)v_0}{t_1} \approx 30 \text{ кН}.$$

Перейдём теперь к рассмотрению второго включения маневрового двигателя. В результате этого включения надо добиться, чтобы скорость спутника стала равной

$$v_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{R_г}} = v_0\sqrt{\frac{R_з}{R_г}} = 0.4v_0.$$

При этом скорость непосредственно до второго включения равна

$$v_2 = \frac{R_з}{R_г}v_1 = 0.16\, v_0$$

поскольку момент импульса при баллистическом движении по орбите сохраняется (второй закон Кеплера). Таким образом, время второго включения двигателя t_2 (его тяга снова должна быть направлена по движению спутника) определяется из условия

$$Ft_2 = m(v_3 - v_2) = 0.24v_0, \quad \text{то есть} \quad t_2 \approx 60 \text{ с}.$$

Разбалловка.

Получена первая космическая скорость	1 балл
Получен радиус геостационарной орбиты	1 балл
Записаны кинетическая и потенциальная энергия спутника	4 балла
Правильно определена полуось эллиптической орбиты	2 балла

Получена скорость после первого импульса	4 балла
Вычислена тяга двигателя	1 балл
Получена скорость спутника в апогее	3 балла
Получена скорость спутника на геостационарной орбите	1 балл
Определена длительность второго импульса	3 балла