Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

5 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных? (*Л. Емельянов*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Если, например, у Иа-Иа были два равных треугольника со сторонами 1, 2, 2, то в первой кучке окажутся палочки с длинами 1, 1, 2, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. Существует много других примеров. Стоит отметить, что из трёх зелёных палочек треугольник сложить всегда можно — см. задачу 10.1.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

Если третья и четвёртая по величине палочки равны, Иа-Иа может любую из них окрасить в жёлтый цвет; на возможность складывания треугольников это не влияет. Существуют примеры, в которых все палочки различны; но описанные верные примеры также должны оцениваться в 7 баллов.

9.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Оно положительно.

Первое решение. Сложив неравенства из условия, получим, что $-x - y > 0$. Перемножив неравенства из условия (это можно делать, поскольку их правые части неотрицательны), получим, что $xy(1-x-y) > 0$. Выражение в скобках положительно, поэтому произведение xy также положительно.

Второе решение. Очевидно, что ни одно из чисел x и y не может равняться нулю. Предположим, что одно из них (для определенности x) положительно. Тогда из первого неравенства в условии получаем $x^2 > x^2 - x > y^2 \geqslant 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2 + x > y^2 + |y| \geqslant y^2 - y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2 - x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

Третье решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - t - y^2$. Его корни равны $t_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4y^2}\right) > 0$ и $t_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4y^2}\right) < 0$, причем $t_1 > \dfrac{\sqrt{1+4y^2}}{2} > |y|$. Предположим, что $x \geqslant 0$. Тогда $f(x) > 0$ и, значит, $x > t_1$. Следовательно,

$$y^2 - y - x^2 < y^2 - y - t_1^2 = y^2 - y - (t_1 + y^2) = -t_1 - y < -|y| - y \leqslant 0.$$

Но это противоречит второму неравенству из условия. Следовательно, $x < 0$. Аналогично доказывается, что $y < 0$ и, значит, $xy > 0$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано только, что $x + y < 0$ — 1 балл.

В условии уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо*. За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т. п.) — не более 1 балла за задачу.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

9.3. Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$? *(П. Козлов)*

Ответ. Три делителя.

Первое решение. Поскольку число $a + b$ больше единицы, оно имеет хотя бы два различных делителя. Докажем, что их не может быть ровно два, т. е. что число $a+b$ не может быть простым. Домножив равенство из условия на знаменатель, получим $ab+c^2=ka+kb$ или, что то же самое, $ab-ka-kb+k^2=k^2-c^2$. Разложив обе части на множители, придем к соотношению

$$(a-k)(b-k)=(k-c)(k+c).$$

Поскольку $k<a$ и $k<b$, обе скобки в левой части положительны и, значит, $c<k$. Тогда существуют такие натуральные числа x, y, z и t, что

$$a-k=xy,\quad b-k=zt,\quad k-c=xz\quad \text{и}\quad k+c=yt. \qquad (*)$$

Например, можно положить $x=\text{НОД}(a-k,k-c)$, $t=\text{НОД}(b-k,k+c)$, $y=(a-k)/x$ и $z=(b-k)/t$. Тогда первые два равенства будут выполнены по определению; с другой стороны, $k-c$ делит xz, а $k+c$ делит yt, поэтому из равенства произведений вытекают написанные равенства.

Следовательно,

$$a+b=(a-k)+(b-k)+(k-c)+(k+c)=$$
$$=xy+zt+xz+yt=(x+t)(y+z).$$

Таким образом, число $a+b$ представляется в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1, и, значит, не является простым.

Наконец, несложно увидеть, что $a+b$ может имеет ровно три различных делителя. Например, если $a=10$, $b=15$, $c=5$, то $k=\dfrac{10\cdot 15+5^2}{10+15}=7$, и $a+b=25=5^2$ имеет три делителя.

Замечание. Ни при каких a и b сумма $a+b$ не может равняться 2^2 и 3^2. Но для любого простого числа $p\geqslant 5$ существуют удовлетворяющие условию задачи числа a, b и c, что $a+b=p^2$. Для случая $a\leqslant b$ все подходящие a, b, c и k имеют вид $a=np$, $b=(p-n)p$, $c=mp$ и $k=np-n^2+m^2$, где $2\leqslant n\leqslant\dfrac{p-1}{2}$, $1\leqslant m\leqslant n-1$. В частности, для $p=5$ пример единственный с точностью до перестановки местами чисел a и b.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что число $p=a+b$ не может быть простым. Предположим противное.

Будем считать, что $a\leqslant b$. Тогда число $kp=ab+c^2=a(p-a)+c^2=ap+c^2-a^2$ делится на p и меньше, чем ap. Следовательно, число $a^2 - c^2 = (a-c)(a+c)$ положительно и кратно p. Тогда первая скобка положительна и $a - c < a + b = p$, поэтому она не делится на p. Вторая скобка также положительна и $a + c < 2a \leqslant a + b = p$, поэтому она также не делится на p. Мы пришли к противоречию, поэтому предположение неверно. Таким образом, $a + b$ — составное число и, значит, оно имеет хотя бы три делителя.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и пример, в котором $a+b$ является квадратом простого числа (т. е. у него три делителя) — 2 балла.

Только доказательство того, что число $a+b$ не может быть простым (т. е. у него больше двух делителей) — 4 балла.

Хорошо известно, что количество делителей натурального n, имеющего разложение на простые сомножители вида $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Если эта формула используется без доказательства — баллы не снижаются.

В первом решении представление $(*)$ читается известным. Если оно используется без доказательства — баллы не снимаются. сли оно используется *с неверным доказательством* — снимается 1 балл.

9.4. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A. Проведем в большей окружности Ω хорду CD, касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD, проходит через центр ω.

(*П. Бибиков*)

Первое решение. Обозначим через O центр окружности ω. Проведем через точку A общую касательную к нашим окружностям; пусть она пересекает прямую CD в точке P. Поскольку $PA = PB$, точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, который также проходит через точки M и O.

Поскольку AM — высота в прямоугольном треугольнике PAO, имеем $PM \cdot PO = PA^2$. С другой стороны, по свойству касательной и секущей имеем $PA^2 = PC \cdot PD$. Значит, $PM \cdot PO = PC \cdot PD$. Это и означает, что точки C, D, O и M лежат на одной окружности.

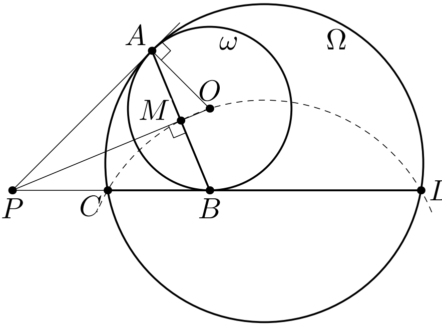

Рис. 1

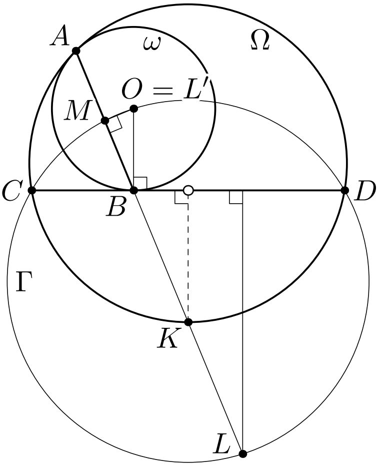

Рис. 2

Второе решение. Пусть O — центр ω. Гомотетия с центром A, переводящая ω в Ω, переводит точку B в точку K окружности Ω, касательная в которой параллельна CD; иначе говоря, K — середина дуги CD.

Пусть L — точка, симметричная B относительно K. Поскольку точки A, C, K и D лежат на одной окружности, имеем

$$BC \cdot BD = BA \cdot BK = \frac{BA}{2} \cdot 2BK = BM \cdot BL,$$

так что точка L лежит на окружности Γ, описанной около треугольника CMD.

Пусть точка L' диаметрально противоположна L на этой окружности. Тогда проекции точек L и L' на хорду CD симметричны относительно середины CD. Но проекции точек L и B также симметричны относительно неё, поскольку точка K — середина LB — лежит на серединном перпендикуляре к CD. Отсюда $L'B \perp CD$, то есть L' лежит на прямой OB. Кроме того, прямые $L'M$ и OM перпендикулярны ML и потому совпадают. Значит, $O = L'$, и O лежит на Γ.

9.5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны вохможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(*М. Дидин*)

Ответ. Выигрывает Петя.

	П		В
П			В
			В

Решение. Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (см. рис. 6). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 7).

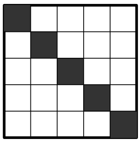

Рис. 3

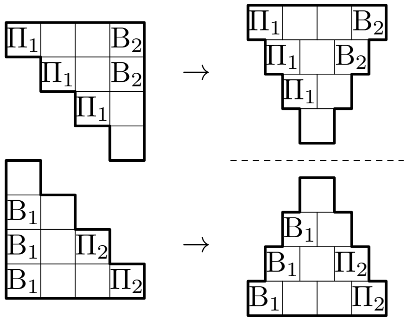

Рис. 4

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 7). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке бует оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходит согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выиграет.

Комментарий. Только верный ответ и, возможно, правильный первый ход Пети — 0 баллов.

То же, с (неверными) попытками устроить симметричную стратегию после первого хода — 1 балл.