

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
9 класс  
Максимальный балл - 35**

**1. Решите задачу (7 баллов)**

На медосмотре Змею Горынычу сообщили, что если он будет выкуривать в день по две пачки сигарет, то жить ему осталось всего 5 лет, если же он будет курить по полпачки в день, то проживёт вдвое больше. Сколько лет проживёт Змей Горыныч, если бросит курить? (Считаем, что все годы одинаковой продолжительности, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время).

**2. Решите задачу (7 баллов)**

Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 - x)^2 - 2008(x^2 - x) + 2010 = 0.$$

**3. Решите задачу (7 баллов)**

В равнобокой трапеции боковые стороны имеют длину  $a$ , а диагонали длину  $b$ . Найдите произведение длин оснований трапеции.

**4. Решите задачу (7 баллов)**

Можно ли равносторонний треугольник разрезать на равносторонние треугольники и раскрасить их в синий, красный и зелёный цвет так, чтобы треугольников всех трёх цветов было поровну, причём треугольники одинакового цвета были одинакового размера, а треугольники разного цвета – разного размера?

**5. Решите задачу (7 баллов)**

Каких треугольников больше – разносторонних, которые можно составить из отрезков длиной 1, 2, ..., 30, или треугольников (не обязательно разносторонних), длины сторон которых целые числа, не превосходящие 27?

**Примерные варианты решений и оценка задач  
Муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике  
9 КЛАСС**

*Эвнин А.Ю.*

**1.** На медосмотре Змею Горынычу сообщили, что если он будет выкуривать в день по две пачки сигарет, то жить ему осталось всего 5 лет, если же он будет курить по полпачки в день, то проживёт вдвое больше. Сколько лет проживёт Змей Горыныч, если бросит курить? (Считаем, что все годы одинаковой продолжительности, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время).

**Решение.** Пусть Змею Горынычу осталось жить (без курения)  $x$  лет, а ежедневное выкуривание пачки сигарет в течение года сокращает жизнь на  $y$  лет. Если он будет выкуривать по две пачки в день в течение 5 лет, то его жизнь сократится на  $x - 5$  лет, то есть  $2y \cdot 5 = x - 5$ . Если же он будет выкуривать по пол пачки в день в течение 10 лет, то его жизнь сократится на  $x - 10$  лет, то есть  $0,5y \cdot 10 = x - 10$ . Из полученных уравнений находим  $x = 15$ .

**Замечание по оцениванию.** Полное решение — 7 баллов.

*Эвнин А.Ю.*

**2.** Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$(x^2 - x)^2 - 2008(x^2 - x) + 2010 = 0.$$

**Ответ:** 4018.

**Решение.** Введём новую переменную  $t = x^2 - x$ . Имеем уравнение

$$t^2 - 2008t + 2010 = 0. (*)$$

У этого уравнения (ввиду положительности дискриминанта) есть корни  $t_1, t_2$ , и их сумма, по теореме Виета, равна 2008. Кроме того, как видно из уравнения (\*),

$t_{1,2} > 0$ . Уравнения  $x^2 - x - t_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) имеют корни (т. к. дискриминант  $1 + 4t_i > 0$ )  $x_{1,2,3,4}$ , причём  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1$ ,  $x_1x_2 = -t_1$ ,  $x_3x_4 = -t_2$ . Теперь легко вычислить сумму квадратов корней:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 + 2t_1$$

Аналогично  $x_3^2 + x_4^2 = 1 + 2t_2$ . Отсюда

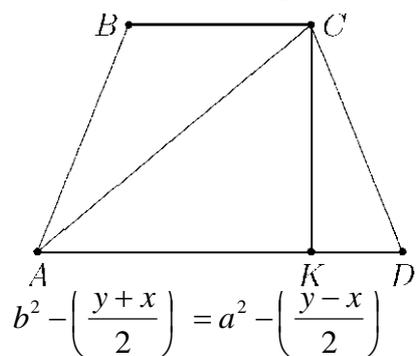
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2 + 2(t_1 + t_2) = 2 + 2 \cdot 2008 = 4018$$

**Замечание по оцениванию.** Полное решение – 7 баллов. Если нет обоснования существования корней, минус 2 балла. За арифметические ошибки минус 1 балл.

*Эвнин А.Ю.*

**3.** В равнобокой трапеции боковые стороны имеют длину  $a$ , а диагонали длину  $b$ . Найдите произведение длин оснований трапеции.

**Решение.** Пусть в равнобокой трапеции  $ABCD$  большее основание  $AD = y$ , а меньшее  $BC = x$ . Пусть также  $K$  – основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $C$  на основание  $AD$ . Тогда



$$KD = \frac{y-x}{2}, \quad AK = \frac{y+x}{2}$$

Применим теорему Пифагора к треугольникам  $AKC$  и  $DKC$

$$CK^2 = AC^2 - AK^2 = DC^2 - DK^2$$

Отсюда

$$b^2 - \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

После несложных преобразований находим  $yx = b^2 - a^2$

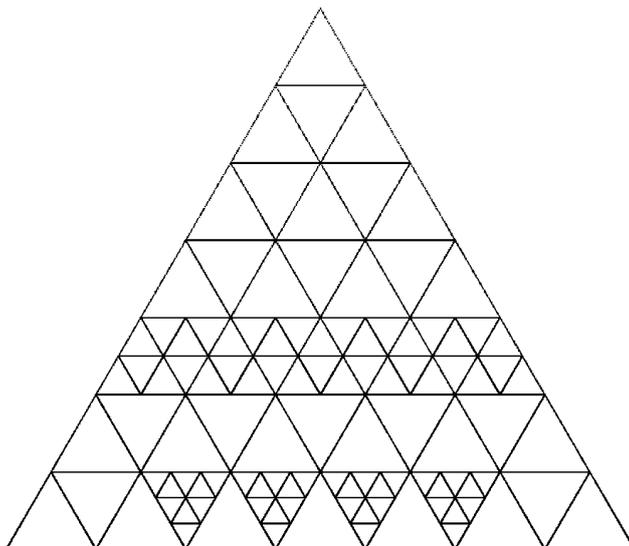
**Замечание по оцениванию.** Полное решение — 7 баллов.

*Эвнин А.Ю.*

**4.** Можно ли равносторонний треугольник разрезать на равносторонние треугольники и раскрасить их в синий, красный и зелёный цвет так, чтобы треугольников всех трёх цветов было поровну, причём треугольники одинакового цвета были одинакового размера, а треугольники разного цвета – разного размера?

**Ответ:** можно.

**Решение.** Пример нужного разрезания показан на рис. Покажем, как можно было до него догадаться. Если каждую сторону правильного треугольника разделить на  $n$  равных частей, после чего точки деления соединить отрезками, параллельными сторонам треугольника, то треугольник будет разбит на  $n^2$ . Разобьем 9 из них на 4 треугольника а 4 – на 9. Приравняем к 36 количество неразрезанных треугольников:  $n^2 - (4 + 9) = 36$  Отсюда  $n = 7$ .



**Замечание по оцениванию.** Полное решение — 7 баллов.

*Эвин А.Ю.*

**5.** Каких треугольников больше – разносторонних, которые можно составить из отрезков длиной 1, 2, ..., 30, или треугольников (не обязательно разносторонних), длины сторон которых целые числа, не превосходящие 27?

**Решение.** Треугольнику со сторонами  $a < b < c \leq 30$  взаимно однозначно соответствует треугольник со сторонами  $a - 1 \leq b - 2 \leq c - 3 \leq 27$ . Важно отметить, что  $a + b > c \Leftrightarrow (a - 1) + (b - 2) > (c - 3)$  – существование треугольника со сторонами  $a, b$  и  $c$ , где  $a < b < c$  — натуральные числа, равносильно существованию треугольника со сторонами  $a - 1, b - 2$  и  $c - 3$ , где  $a - 1 \leq b - 2 \leq c - 3$ .

**Ответ:** Их одинаковое количество.

**Замечание по оцениванию.** Полное решение – 7 баллов. Возможно, некоторые участники олимпиады смогут с помощью рекуррентных соотношений найти точное количество треугольников одного и другого вида - 1925.