Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Выпускная квалификационная работа

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Работу выполнила:
студентка 151 группы
направления подготовки 44.03.05
Педагогическое образование,
профили «Математика и
информатика»
Пастухова Екатерина Сергеевна

____
подпись

«Допущен к защите»

Зав. кафедрой высшей математики
Е.Л. Черемных

_____________ _____________
дата подпись

Руководитель: ст. преп. кафедры
высшей математики
Недре Лариса Георгиевна

____
подпись

ПЕРМЬ
2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Внеурочная работа по математике развивает личность учащихся. Математические олимпиады как форма организации внеурочной работы является составной частью учебно-воспитательной работы в школе.

В ФГОС общего образования значительная роль отведена организации внеурочной деятельности, которая реализуется по направлениям развития личности в таких формах, как научно-практические конференции, школьные научные общества, олимпиады, поисковые и научные исследования и в других формах, отличных от урочной, на добровольной основе в соответствии с выбором участников образовательного процесса. Олимпиады стимулируют учащихся к познавательной деятельности, тем самым у них воспитывается математическое мышление, интерес к предмету, самостоятельность.

Подготовке учащихся к решению олимпиадных математических задач не всегда уделяется большое внимание. На уроках математики решение олимпиадных задач учитель организовать не может из-за ограниченности по времени. Поэтому целесообразнее проводить для учащихся дополнительные занятия, на которых будет организована подготовка к олимпиадам. В концепции профильного обучения на старшей ступени школы предусмотрены обязательные для посещения элективные курсы, на которых возможна организация подготовки к математическим олимпиадам.

Во время осенней научной сессии на математическом факультете студентам первого курса было предложено задание математической олимпиады, которое необходимо было решить с помощью функционально-графического метода. Итоги показали, что только два человека смогли справиться с поставленным заданием и это с учетом того, что студенты буквально пару месяцев назад только закончили 11 класс. Исходя из таких результатов, можно сделать вывод, что на старшей ступени школы необходимо уделить внимание решению олимпиадных задач.

Объект исследования: процесс обучения решению олимпиадных математических задач.

Предмет исследования: обучение учащихся старших классов решению уравнений и неравенств олимпиадного характера.

Целью работы является разработка занятий элективного курса «Уравнения и неравенства в математических олимпиадах» для учащихся10-11-х классов.

В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

- подобрать и проанализировать учебную и методическую литературу об организации и проведении школьных математических олимпиад;

- раскрыть теоретические вопросы, связанные с понятиями и методами решений уравнений и неравенств;

- составить учебный план элективного курса «Уравнения и неравенства в математических олимпиадах» и разработать несколько занятий для реализации данного курса.

Практическая значимость работы состоит в том, что в рамках данной темы рассмотрены основные методы решения уравнений и неравенств повышенной сложности; приведены примеры уравнений и неравенств, а также даны методические рекомендации по их решению, которые могут быть использованы в элективных курсах для учащихся старших классов.

Методы исследования: анализ учебно-методической литературы, систематизация методов решения уравнений и неравенств, обобщение полученной информации.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении формулируется актуальность, цель и структура данной работы. В первой главе приведена история, цели и структура математических олимпиад, содержатся критерии оценивания и порядок проведения олимпиад в школе. Во второй главе рассмотрена теория, которая дает основу понимания того, что такое элективный курс и какова его структура. Также во второй главе представлены методы решений уравнений и неравенств математических олимпиад, подробно рассмотрены возможности использования классических неравенств при решении задач, разработан учебный план элективного курса для учащихся старших классов и приведены фрагменты некоторых его занятий. В заключении подводятся итоги проделанной работы.

ГЛАВА 1. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Школьные математические олимпиады являются наиболее эффективным средством выявления способностей, интересов и возможностей учащихся. Рассмотрим основные организационные вопросы, связанные с проведением олимпиад по математике в школе.

1.1. Математические олимпиады как форма организации внеурочной работы в школе

В ФГОС среднего (полного) общего образования отмечается, что в целях обеспечения индивидуальных потребностей обучающихся в основной образовательной программе предусматриваются: учебные предметы, курсы, обеспечивающие различные интересы обучающихся, а также внеурочная деятельность [31].

Внеурочная работа и учебно-воспитательная работа на уроке тесно взаимосвязаны. На уроках развивается интерес к предмету и появляется потребность в более глубоком изучении тех или иных вопросов, интересных для учащихся. Внеурочные занятия дают возможность учащимся применить знания, полученные на уроках и углубить их, в дальнейшем применяя на практике.

К популярным формам внеклассной работы в школе можно отнести факультативы, олимпиады.

Олимпиады возникли в Древней Греции как состязания в ловкости, силе, красоте. Первая олимпиада состоялась в 776 г. до н. э. Олимпиады проводились в Олимпии один раз в четыре года.

Различного рода состязании проводились не только в спорте. Хорошо известна любовь к состязаниям в решении задач как на Руси, так и во многих других странах мира. Математические соревнования по решению задач также называются олимпиадами, хотя они проводятся в настоящее время с периодом не в четыре года, а, как правило, ежегодно.

В России конкурсы по решению задач начали проводиться с 1886 г., в Венгрии и Румынии – с 1894 г., в других странах – значительно позже.

Особенно широкое развитие олимпиады получили в СССР за годы Советской власти. Уже в начале 30-х годов начали работать математические кружки и проводиться олимпиады в Московском и Ленинградском университетах. В 1934 г. была проведена первая математическая олимпиада школьников в Ленинградском университете.

С 1961 г. олимпиады в масштабе всей страны стали проводится регулярно. Они назывались Всероссийскими математическими олимпиадами с участием команд союзных республик [22].

1.2. Цели и структура проведения школьных предметных олимпиад

Основными целями (по классификации Александра Антоновича Шрайнера) математической олимпиады являются:

- расширение кругозора учащихся;

- развитие интереса учащихся к изучению математики;

- выявление учащихся для участия в олимпиаде другого уровня (районных, областных и т.д.).

При подготовке к олимпиадам и непосредственном их проведении решаются следующие задачи:

- расширение общего кругозора учащихся по математике;

- углубление школьного курса математики;

- развитие нестандартного мышления;

- подготовка учащихся к участию в олимпиадах и соревнованиях по математике более высокого уровня;

- ознакомление с возможностями современных информационных технологий при обучении и изучении математики;

- воспитание самостоятельности, целеустремленности, трудолюбия, силы воли и умения работать в команде [30].

Структура проведения олимпиад

В последние годы в России проводятся различные математические олимпиады. Это традиционные, для абитуриентов, нестандартные и тому подобные олимпиады. Традиционные олимпиады проходят, как правило, в пять этапов: школьный, районный (городской), областной (краевой, республиканский), зональный и всероссийский.

Первый этап - школьный – в свою очередь делится на 2 части:

- внутриклассная письменная олимпиада, проводимая в начале учебного года, по ее результатам формируется классная команда для различных видов математических соревнований;

- школьный этап олимпиады, проводимый в конце первой четверти письменно и для всех учащихся. Как правило, продолжительность олимпиады для 5-6-х классов – 2 урока, для 7-11-х классов – 3-4 урока.

Вариант школьной олимпиады состоит из 4-6 задач разной сложности, охватывающих большинство разделов математики, изученных к моменту проведения олимпиады. По результатам этого этапа учащиеся приглашаются на следующий тур городского (районного) уровня, проводимый в конце ноября – начале декабря.

Второй этап - районный (городской).

Олимпиада проводится для учащихся 6-11-х классов по заданиям, разработанным муниципальными предметными комиссиями. В ряде областей второй этап олимпиады проводится по единым заданиям, подготовленным методической комиссией региона. Второй этап проходит в один день – как правило, выходной.

Обычно продолжительность олимпиады для 6-х классов – 3 часа, для 7-11-х классов – 4 часа. Вариант районной (городской) олимпиады состоит из 5-6 задач разной сложности, охватывающих большинство разделов математики, изученных к моменту проведения олимпиады (с учетом всех существующих утвержденных учебников). Хотя во втором этапе могут принимать участие лишь школьники, успешно выступившие в первом этапе, в ряде городов второй этап носит открытый характер (в нем могут принять участие все желающие учащиеся).

Третий этап - областной (краевой, республиканский).

Третий этап олимпиады проводится государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации одновременно во всех субъектах Российской Федерации, в сроки, утвержденные Федеральным агентством по образованию.

Третий этап олимпиады проходит, как правило, в два тура по заданиям (методическим рекомендациям), разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады. Олимпиада проводится для учащихся 8-11-х классов.

Продолжительность каждого тура олимпиады 4 часа. Вариант каждого тура региональной олимпиады состоит из 4 задач. Участниками третьего этапа олимпиады являются победители и призеры второго этапа, а также победители и призеры третьего этапа олимпиады предыдущего года.

По результатам олимпиады из победителей и призеров формируются команды областей, краев и республик для участия в четвертом этапе, а также победителей областных олимпиад зачисляют в ВУЗы без вступительных экзаменов.

Четвертый этап - зональный.

Этот этап олимпиады проводится государственными органами управления образованием субъектов Российской Федерации одновременно во всех федеральных округах Российской Федерации. Четвертый этап олимпиады проходит в два тура по заданиям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады. Олимпиада проводится для учащихся 8-11-х классов. Продолжительность каждого тура олимпиады – 4,5 часа. Вариант каждого тура олимпиады состоит из 4 задач. По результатам олимпиады из победителей и призеров формируются команды округов для участия в пятом этапе.

Пятый этап - всероссийский (заключительный).

Пятый этап олимпиады проходит в два тура по заданиям, разработанным Центральной предметной комиссией олимпиады. Олимпиада проводится для учащихся 9-11-х классов. Продолжительность каждого тура олимпиады – 5 часов. Вариант каждого тура олимпиады состоит из 4 задач.

По результатам олимпиады, с учетом выступления на учебно-тренировочных сборах и других отборочных соревнованиях, формируется команда России для участия в Международной математической олимпиаде.

Данный вид олимпиад остается самым массовым и популярным как среди учащихся, так и среди учителей. Наряду с традиционными олимпиадами большой популярностью стали пользоваться так же олимпиады, состоящие из заочного и нескольких очных туров; олимпиады для абитуриентов вузов; различного рода заочные олимпиады («Кенгуру», олимпиады школы «Авангард» и так называемый «Турнир городов») [23].

1.3. Подготовка и проведение математических олимпиад в школе

Время проведения школьных олимпиад определяется в соответствии с «Положением о проведении Всероссийской олимпиады в данном учебном году»; как правило, для 8-11 классов это декабрь (ноябрь), а для 5-7 классов – январь-февраль. Возможно и одновременное проведение олимпиады для всех классов, если в январе (декабре) проводится II тур для 5-11 классов [6].

Наиболее ответственным моментом подготовки олимпиады является составление текста олимпиады. Рассмотрим основные требования к тексту школьной олимпиады по математике.

1. Ограниченное число задач.

2. Задачи должны располагаться в порядке возрастания трудности (сложности).

3. Задания должны быть подобраны из разных разделов курса математики.

4. Не должны присутствовать задачи, для решения которых необходимо запоминание сложных формул.

5. Задания могут быть одинаковыми для разных классов.

Число задач в тексте олимпиадной работы должно быть от 4 до 7 (при 1-3 заданиях могут возникнуть проблемы с определением победителей и призеров олимпиады, а настроиться на решение больше 7 заданий сложно).

Все задачи в тексте работы должны располагаться в порядке возрастания трудности (или сложности). Что в данном случае нужно понимать под сложностью или трудностью? И различаются ли эти понятия вообще?

Сложность - это объективная характеристика задачи, определяемая ее структурой. Сложность задачи зависит от:

- объема информации (числа понятий, суждений), необходимого для ее решения;

- числа данных в задаче;

- числа связей между ними;

- количества возможных выводов из условия задачи;

- количества непосредственных выводов, необходимых для решения задачи;

- длины рассуждений при решении задачи;

- общего числа шагов решения, привлеченных аргументов и т.д.

Один из математиков В.И. Крупич предложил следующую формулу для нахождения сложности задачи: $S = m + n + l$, где S – сложность задачи, m– число элементов задачи, n – число явных связей между элементами задачи, l– число видов связи.

Рассчитать сложность задачи не очень просто (и мы не думаем, что задания на самом деле так распределяются – по крайней мере на первых двух – трёх уровнях). Обязательно при составлении текста олимпиадной работы то, что задания должны быть взяты из разных разделов, некоторые из них нестандартные. Поэтому лучше все же применять понятие трудности задания.

Трудность – субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим ее учеником.

Трудность задачи зависит от:

- сложности задачи (сложная задача, как правило, является более трудной для учащихся);

- времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте задачи (задачи на материал, изученный 1-2 года назад, используемые факты, которые уже забылись, более трудны для учащихся);

- практики в решении подобного рода задач;

- уровня развития ученика (задача, трудная для среднего ученика общеобразовательного класса, может быть легкой для обычного ученика физико-математического класса);

- возраста учащегося (задача, трудная для пятиклассника, может быть легкой для восьмиклассника) и т. д.

Трудность определяется процентом учеников, решивших задачу, из числа ее решавших.

Существуют различные формулы для расчета трудности задачи. Рассмотрим, на наш взгляд, наиболее простую из них: $K_T = \frac{n}{p} \cdot 100\%$, где K_T – коэффициент трудности, измеряемый в процентах, n – число учащихся, не решивших задачу, p – число учащихся, решавших задачу, в том числе и не приступивших к ней (общее число участников олимпиады).

В числе первых задач должны быть 1 – 2 задачи, доступные большинству учащихся, т.е. их трудность должна быть примерно 10-30%. Это могут быть обычные задачи продвинутого уровня, аналогичные задачам из контрольных работ, а также и не изучаемые в школе, но которые должно решить большинство участников. Это необходимо, так как в школьной олимпиаде участвуют все желающие. А участник, не решивший ни одной задачи, теряет уверенность в своих силах, а иногда и интерес к математике.

Поэтому должны быть 1 – 2 доступные почти всем задачи. Но и эти задачи могут содержать «изюминку», благодаря которой более сильный ученик решит ее быстрее и рациональнее.

В середине текста олимпиады должно быть 2 – 3 задачи повышенной трудности. Это могут быть задачи продвинутого уровня из контрольных работ, но с измененными условиями. Их должна решить примерно половина участников, т. е. трудность их будет примерно 40-60% (ученик, решивший более трети всех задач, уже может получить поощрение).

Последними в тексте олимпиады должно быть 1 – 2 задания более трудных, их должны решить единицы, значит, и трудность их будет уже примерно 80-95%. Это задания уровня районных (городских) олимпиад.

Включаемые задания должны быть из разных разделов школьного курса математики, но, как правило, на материал, изученный в данном учебном году и во втором полугодии предыдущего года.

В числе заданий текста олимпиады могут быть занимательные задачи, задачи-шутки, софизмы, задачи прикладного характера.

Для заинтересованности учащихся в посещении кружков, факультативов, элективных курсов желательно включать задания, аналогичные рассмотренным. Это могут быть логические задачи, задачи на применение принципа Дирихле, графов, задачи на раскраски, задачи с параметрами, уравнения и функции, содержащие модуль, уравнения в целых числах (Диофантовы уравнения) и т.п. Такого рода задачи часто называют специальным термином «олимпиадные» (по И. Л. Бабинской), хотя, конечно, не только они должны быть в тексте школьной олимпиады.

В качестве одной из задач может быть задача, в условии которой фигурирует год проведения олимпиады.

В числе задач не должно быть задач с длительными выкладками, задач на использование трудно запоминающихся формул, на использование справочных таблиц.

В текстах олимпиад для разных классов могут быть одинаковые задания (как это часто делается в текстах международного конкурса – игры «Кенгуру») [30].

Критерии оценивания

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

Чаще всего в соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается из 7 баллов.

• 7 баллов – задача решена правильно;

• 6 баллов – задача решена, но есть мелкие замечания к решению (например, не рассмотрены некоторые простые частные случаи);

• 5 баллов – задача решена в целом, недостатки решения легко устраняются;

• 3-4 балла – задача решена «наполовину», т.е. ход решения правильный, есть значительный прогресс в решении, но полное решение требует дополнительных существенных идей;

• 1-2 балла – задача не решена, но подход к решению правильный или задача решена для простых частных случаев;

• 0 баллов – решение задачи неправильное и не содержит идей с помощью которых задача может быть решена, или задача не решалась.

Как правило, жюри олимпиады разрабатывает критерии оценки решений и начисления баллов по каждой задачей отдельно. Эти критерии могут отличаться от приведенных выше. При этом часто за решение простых (по мнению жюри) задач начисляются только такие оценки: 7 баллов, 6 баллов, 1 балл и 0 баллов.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. Важно отметить, что исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) не являются основанием для снятия баллов.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Победители и призеры олимпиады определяются жюри в соответствии с итоговой таблицей. Список победителей и призеров утверждается организатором соответствующего этапа олимпиады. Количество победителей и призеров олимпиады не должно превышать 45% от общего числа участников олимпиады. Важно отметить, что победителями олимпиады являются все участники, набравшие наибольшие баллы. Поэтому жюри может определить в любом классе более чем одного победителя [14].

Задания школьного и муниципального этапов олимпиады

Олимпиадные задания школьного и муниципального этапов составляются на основе программ по математике для общеобразовательных учебных учреждений. Также допускается включение задач, тематика которых входит в программы школьных кружков (факультативов). Приводятся только те темы, которые рекомендуется использовать при составлении вариантов заданий текущего учебного года. Важно отметить, что в силу специфики регионов и различий в степени доступности участникам олимпиады тех или иных источников задач, сложности в составлении (подборе) задач предлагаемой тематики необходимой для данной территории трудности, предметно-методические комиссии могут менять тематику заданий, сохраняя в целом структуру варианта [1].

На основании выбранной учебной и методической литературы были выделены основные моменты, связанные с организацией и проведением школьных математических олимпиад. Подробно раскрыты цели и структура олимпиад по математике в школе. Рассмотрены критерии оценивания. Сделан вывод, что математические олимпиады являются достаточно популярной формой организацией внеклассной работы в школе.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ

Математические олимпиады в школе охватывают достаточно большой объем тем школьного курса. В большей степени в олимпиадах по математике встречаются уравнения и неравенства разных типов. В данной главе раскрыты теоретические вопросы, связанные с понятиями и методами решений уравнений и неравенств. Составлен учебный план курса «Уравнения и неравенства в математических олимпиадах». Приведены разработки занятий для реализации курса.

2.1. Методы решения уравнений и неравенств школьных олимпиад

Функционально-графический метод

Для того чтобы перейти непосредственно к теме функционально-графический метод решения уравнений, стоит определить что такое функция и что такое график функции.

Говорят, что две величины связаны функциональной зависимостью, если каждому значению одной величины, которую называют аргументом (или независимой переменной) и обозначают обычно буквой x, отвечает значение другой величины y, называемой функцией. Если величина y есть функция величины x, то прежде всего указывают, какие значения может принимать x. Эти «разрешенные» значения аргумента x называются его допустимыми значениями, а множество всех допустимых значений величины x называется областью определения функции y.

Функцию можно изображать геометрически с помощью графика. Чтобы построить график некоторой функции, рассмотрим некоторое допустимое значение x и отвечающее ему значение y. Например, пусть значение x – это число a, а соответствующее ему значение y – число b, равное $f(a)$. Эту пару чисел a и b изобразим на плоскости точкой с координатами $(a; b)$. Построим такие точки для всех допустимых значений x. Набор получившихся точек и есть график функции.

График функции – это множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты – соответствующими значениями функции y.

Чаще всего функционально-графический метод применяют, когда в обеих частях уравнения стоят функции разного вида.

Такое уравнение имеет вид $f(x) = g(x)$

Алгоритм функционально-графического метода заключается в следующем.

1. Правую и левую части уравнений $f(x)$ и $g(x)$ рассматривают как функции, входящие в уравнение.

2. В одной координатной системе строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

3. Корнями уравнения будут являться абсциссы точек пересечения построенных графиков [12].

Примеры заданий из школьных математических олимпиад, решаемые с помощью функционально-графического метода

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x^2} + 2x = 3$, построив график. [Всероссийская олимпиада по математике школьный этап 2012 – 2013 учебный год].

Решение.

Упростим $\sqrt{x^2}+2x$

$$\sqrt{x^2}+2x=|x|+2x=\begin{cases}-x+2x=x, \text{если } x<0\\ x+2x=3x, \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

Тогда график будет состоять из линий:

$y=x, x<0$ и $y=3x, x\ge 0$. (рис.1).

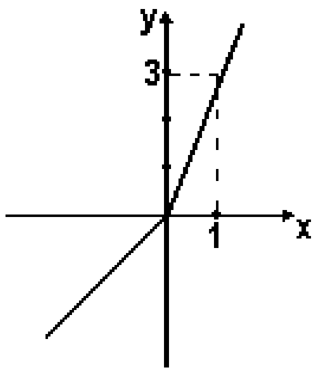

Рис. 1

Ответ: 1.

Пример 2. Решите неравенство $4x^2-8|x|-5\le 0$, используя функционально-графический метод. [Всероссийская олимпиада по математике школьный этап 2012 – 2013 учебный год].

Решение. (рис.2).

$$\begin{cases}x<0, \quad \text{то} \quad y=4x^2+8x-5\\ x\ge 0, \quad \text{то} \quad y=4x^2-8x-5\end{cases}$$

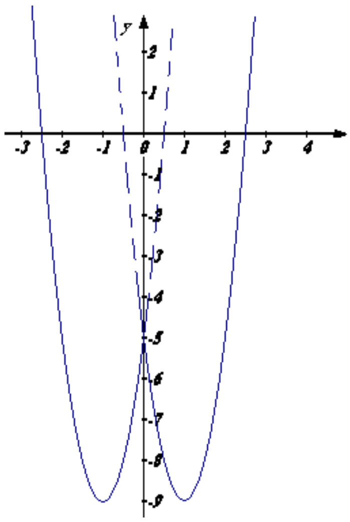

Рис.2

Ответ:[-2,5; 2,5].

Пример 3. Решите уравнение $x^4 - 8x^2 + 17 = \sin\frac{\pi x}{4}$ [Всероссийская олимпиада по математике школьный этап 2012 – 2013 учебный год].

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения: $x^4 - 8x^2 + 17 = (x^2 - 4)^2 + 1$

При любых значениях *x* верны неравенства:

$$(x^2 - 4)^2 + 1 \geq 1; \sin\frac{\pi}{4} \leq 1.$$

Тогда, корнями данного уравнения являются только такие *x*, при которых обе части уравнения равны 1. То есть уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 + 1 = 1, \\ \sin\frac{\pi x}{4} = 1 \end{cases},$$

решением которой является число 2.

Ответ: $x = 2$.

Пример 4. Решите уравнение $\left|x^2 + 2|x| - 3\right| = 0$ [Всероссийская олимпиада школьников 2013-2014 в городе Москве Типовые задания I (школьного) этапа олимпиады по математике].

Решение.

Поскольку функция четная, достаточно описать ее для неотрицательных значений аргумента. Имеем: (рис.3).

$$y(x) = \left|x^2 + 2|x| - 3\right| = \left|x^2 + 2x - 3\right| = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, \ \textit{при} \ x \in [0; 1], \\ x^2 + 2x - 3, \ \textit{при} \ x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

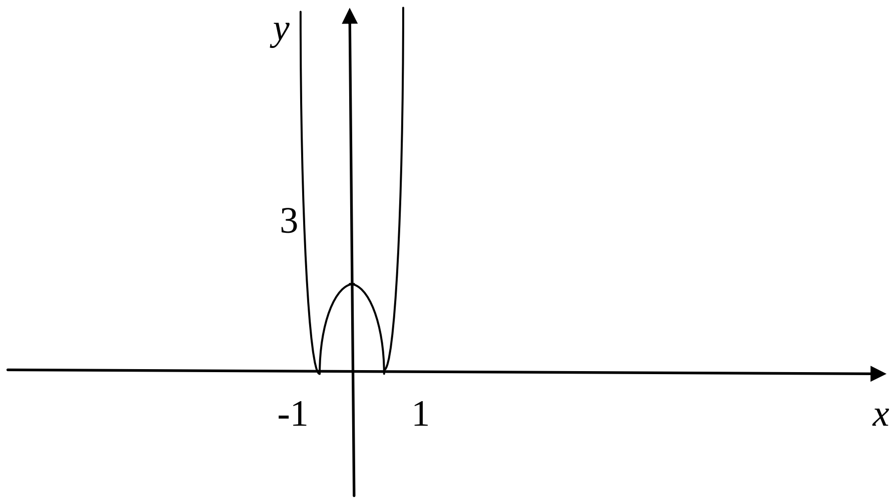

Рис.3

Ответ: 1, -1.

Пример 5. Решите уравнение $|ctgx| + \frac{1}{|ctgx|} = \sqrt[6]{-tg^2x - 2tgx + 63}$

[Варианты заданий заключительного (очного) этапа олимпиады МГТУ им. Н.Э. Баумана «Шаг в будущее» по математике для 8-10 классов 2013-2014 учебного года].

Решение.

Заменим $t = tgx$, уравнение примет вид:

$$|t| + \frac{1}{|t|} = \sqrt[6]{-t - 2t + 63}.$$

Замечаем, что функция, стоящая в левой части ограничена снизу и принимает свое наименьшее значение, равное 2, при $t = \pm 1$. Функция, стоящая в правой части ограничена сверху, принимает наибольшее значение 2 при t = -1. Отсюда заключаем, что уравнение имеет единственное решение t = -1.

Решим уравнение $tgx = -1$, получаем $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Метод разложения на множители

Алгебраические уравнения и неравенства можно представить в виде $P(x)=0, P(x)>0$ или $P(x)<0$ соответственно, где $P(x)$ – многочлен.

При решении алгебраических уравнений и неравенств зачастую приходится раскладывать многочлен на множители, то есть представлять его в виде произведения нескольких многочленов первой и второй степени.

К основным способам разложения многочлена на множители является применение формул сокращенного умножения, выделение полного квадрата, вынесение общего множителя, подбор корня многочлена по его старшему и свободному коэффициентам.

Пример 1. Решите уравнение $y-y^2-2y^3=\frac{1}{3}$ [30].

Решение.

Необходимо преобразовать уравнение таким образом, чтобы выделить куб суммы или разности двух выражений.

$$3y-3y^2-6y^3-1=0,$$

$$y^3-3y^2+3y-1-7y^3=0,$$

$$(y-1)^3=7y^3.$$

Извлечем корень кубический из правой и левой части уравнения, выразим yи получим, $y=\frac{1}{1-\sqrt[3]{7}}$.

Ответ: $\frac{1}{1-\sqrt[3]{7}}$.

Пример 2. Решите неравенство $t^4-4t^3+12t^2-24t+24<0$.

Решение.

$$t^4-4t^3+12t^2-24t+24<0$$

$$t^4-4t^3+4t^2-4t^2+12t^2-24t+24<0$$

$$(t^2-2t)^2+(8t^2-24t+24)<0.$$

Но $\left(t^2-2t\right)^2 \geq 0$ для любых t, а $8t^2-24t+24>0$ для любых t, так как $a>0$, а дискриминант – отрицательный. Следовательно, все неравенство будет больше нуля.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решите неравенство $\left(x^2-4x\right)^2 \geq 16$.

Решение.

Перенесем 16 в левую часть и, используя формулу разности квадратов, преобразуем полученное неравенство:

$$\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x-4\right) \geq 0,$$

$$(x-2)^2\left(x^2-4x-4\right) \geq 0.$$

Так как $\left(x^2-4x-4\right)=\left(x-2-\sqrt{8}\right)\left(x-2+\sqrt{8}\right)$, то неравенство примет вид:

$$(x-2)^2\left(x-2-\sqrt{8}\right)\left(x-2+\sqrt{8}\right) \geq 0.$$

Решением будет: $(-\infty;2-\sqrt{8}]\cup\{2\}\cup[2+\sqrt{8};+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;2-\sqrt{8}]\cup\{2\}\cup[2+\sqrt{8};+\infty)$.

Пример 4. Найдите чему равно число, которое должно стоять на месте многоточия $\left(x^2+\ldots\right)(x+1)=\left(x^4+1\right)(x+2)$, если известно, что один из корней данного уравнения равен 1.

Решение.

Подставим вместо x = 1. Получим, что число на месте многоточия равно 2.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите уравнение $y^2-4=\sqrt{y+4}$.

Решение.

$$y^2-4=\sqrt{y+4},$$

$$y^2=\sqrt{y+4}+4,$$

$$y^2+y+\frac{1}{4}=y+4+\sqrt{y+4}+\frac{1}{4},$$

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{y+4}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(y+\frac{1}{2}-\sqrt{y+4}-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}+\sqrt{y+4}+\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$y=\sqrt{y+4};\sqrt{y+4}=-y-1.$$

Решая данные уравнения, находим корни и выбрасываем посторонние корни.

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, x_2\,\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ – посторонний корень. Корни второго уравнения: $x_3=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, x_4=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ – посторонний корень.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Пример 6. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{x-4}+2\cdot\dfrac{x}{x^2-4}+3=0.$

Решение.

Преобразуем уравнение к виду:

$$\left(\frac{x^2}{x-4}+1\right)+\left(2\cdot\frac{x}{x^2-4}+2\right)=0,.$$

$$\frac{x^2+x-4}{x-4}+2\cdot\frac{x^2+x-4}{x^2-4}=0.$$

Вынесем общий множитель за скобку:

$$\left(x^2+x-4\right)\left(\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x^2-4}\right)=0.$$

Получим решение: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}, x_{3,4}=-1\pm\sqrt{13}$.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}, x_{3,4}=-1\pm\sqrt{13}$.

Метод введения новой переменной

Пример 1. Решите уравнение $2\cos^2\beta+\cos\beta=1$.

Решение.

Обозначим $\cos\beta=t$, получим уравнение $2t^2+t=1$, корнями данного уравнения будут -1 и 0,5. Решим соответствующие уравнения $\cos\beta=-1$, $\cos\beta=0{,}5$, получим $\beta=\pi+2\pi n; \beta=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, n,k\in Z$. Объединим решения и получим ответ.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}m, m\in Z.$

Пример 2. Решите уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\right)\right)=0$.

Решение.

Обозначим

$\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\right)=\beta$, тогда получим $\sin\beta=0$, решением которого будет $\beta=\pi k, k\in Z$. Учитывая, что $|\beta|\leq\dfrac{\pi}{2}$, получим при n = 0 β = 0. Тогда исходное уравнение будет равносильно уравнению $\sin\dfrac{\pi}{2}x=0$, решением которого будет $x=2n, n\in Z$.

Ответ: $x=2n, n\in Z$.

Пример 3. Решите уравнение $x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x-15}=30$.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^2+2x-15}=t, t\geq 0.$ Получаем $t^2+2t-15=0.$ Откуда $t_1=-5,\ t_2=3.$ $\sqrt{x^2+2x-15}=3,$ $x^2+2x-15=9,$ $x^2+2x-24=0.$ $x_1=-6,\ x_2=4.$

Ответ: $x_1=-6, x_2=4.$

Пример 4. Решите уравнение $16x^2+9x+1=24x\sqrt{x+13}$.

Решение.

$x\sqrt{x+13}\neq 0$, тогда $16\frac{x}{\sqrt{x+13}}+9\frac{\sqrt{x+13}}{x}-24=0$.

Заменим $\frac{x}{\sqrt{x+13}}=t, t>0, x>0$,

$16t+9\cdot\frac{1}{t}-24=0$, $16t^2-24t+9=0$.Откуда $t=\frac{3}{4}$.

$\frac{x}{\sqrt{x+13}}=\frac{3}{4}$, Откуда $x_1=3$, $x_2=-\frac{39}{16}$ – не удовлетворяет условию.

Ответ: $x=3$.

2.2. Использование классических неравенств при решении олимпиадных задач

Кроме стандартных методов решения неравенств существует метод, который позволяет доказать неравенство с помощью классических неравенств таких как, неравенства Йенсена, Коши, Коши-Буняковского, Гельдера и Минковского.

В основе доказательства классических неравенств Йенсена, Коши, Коши-Буняковского и др. лежит понятие выпуклости. Достаточно важное понятие, с которым встречаются в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Термин выпуклость, используется в разных разделах математики, а не только при изучении фигур.

Определение. Кривая в точке M вогнута вниз (вверх), если в некоторой окрестности этой точки она лежит ниже (выше) касательной. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба, если кривая переходит в точке M с одной стороны касательной на другую, то есть если в некоторой окрестности точки M все точки кривой с абсциссами $x < x_0$ лежат по одну сторону от касательной, а все точки с абсциссами $x > x_0$ - по другую [8].

Для того чтобы успешно применять неравенства необходимо знать критерий, позволяющий определить является ли данная функция выпуклой.

Теорема. Пусть $y= f(x)$ дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.

Примеры выпуклых функций:

1. $y = x^{\alpha} (x > 0)$

Так как $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, то при $0 < \alpha < 1$ функция вогнутая, при $\alpha > 1$ и $\alpha < 0$ – выпуклая.

2. $y = a^{x} (a > 0, a \neq 1)$

Так как $y'' = a^{x} \ln^{2} a > 0$, то функция выпуклая.

3. $y = \log_{a} x \,(x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Так как $y'' = -\dfrac{1}{x^{2} \ln a}$, то при $a < 1$, функция выпуклая, а при $a > 1$ – вогнутая.

4. $y = \ln(1 + e^{x})$

Так как $y'' = \dfrac{e^{x}}{(1 + e^{x})^{2}} > 0$, то эта функция выпуклая.

5. $y = x \ln x$

Так как $y'' = \dfrac{1}{x} > 0$, то функция выпуклая.

6. $y = (1 + x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} (x > 0)$

Так как $y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1 + x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha < 1$ функция вогнутая, а при $\alpha > 1$ – выпуклая.

Неравенство Йенсена

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Йенсена. Остальные неравенства, такие как неравенство Коши, Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского являются его следствием.

Для доказательства понадобиться один математический факт, который в школьном курсе, как правило, не освещают – это центр масс.

Предположим, что с каждой точкой плоскости связано некоторое число, которое будем называть «массой» этой точки («масса» не обязательно должна быть положительной). Тогда можно определить «центр масс» двух точек.

Определение. Центром масс двух точек A и B будем называть такую точку C на отрезке AB, что $\frac{AC}{BC}=\frac{m_B}{m_A}$, где m_A, m_B – массы точек A и B соответственно.

Декартовы координаты точки C выражаются через координаты точек A и B.

Теорема (неравенство Йенсена). Пусть $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные числа из этого интервала, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда

$$f(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)\le a_1f(x_1)+\ldots+a_nf(x_n). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Расположим в этих точках грузы с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n};\frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}\right).$$

Так как точки $A_1, A_2,..., A_n$ принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику. А это означает, что ордината центра масс не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой, т. е.

$$f\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)\le\frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}. \qquad (2)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1=a_1$, $\ldots$, $m_n=a_n$. Стоит сделать два важных замечания. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Йенсена (1) мы доказали неравенство (2). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (1)

$a_i=\dfrac{m_i}{m_1+\ldots+m_n}\,(i=1,2,\ldots,n)$, получаем неравенство (2). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Йенсена. Неравенство (1) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (2). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее знаки неравенства Йенсена (1) и (2) меняются на противоположные [6].

Неравенство Коши - Буняковского

Неравенство Коши-Буняковского иногда называют неравенством Шварца и неравенством Коши-Буняковского-Шварца, хотя работы немецкого математика Шварца на эту тему появились только спустя 25 лет после работ русского математика Буняковского. Конечномерный случай этого неравенства был доказан Коши в 1821 году и называется неравенством Коши.

С помощью неравенство Йенсена доказываются другие знаменитые неравенства. Рассмотрим, как неравенство Йенсена используется при доказательстве неравенства Коши-Буняковского.

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$— произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y = x^2$ – выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Йенсена (2)

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)^2 \le \frac{m_1x_1^{\ 2}+\ldots+m_nx_n^{\ 2}}{m_1+\ldots+m_n}(m_i>0)$$

Следовательно, $\left(m_1x_1^{\ 2}+\ldots+m_nx_n^{\ 2}\right)\cdot\left(m_1+\ldots+m_n\right)\ge\left(m_1x_1+\ldots+m_nx_n\right)^2$.

Положив, $m_i=b_i^{\ 2}$, $x_i=\dfrac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство [15].

Неравенство Коши

Неравенство, французского математика Коши, основоположника теории аналитических функций, гласит о том, что среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\ .$$

Неравенство Гельдера

Немецкий математик Гельдер обобщил неравенство Коши - Буняковского, в результате имеем следующее.

Пусть p, q – положительные числа, причем $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_1^{\ p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\ q}\right)^{\frac{1}{q}}(a_i,b_i>0).$$

Неравенство Минковского

Немецкий математик Минковский Герман, разработавший геометрическую теорию чисел и геометрическую четырехмерную модель теории относительности, вывел следующее неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \le \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)} \text{ [27].}$$

Примеры использования классических неравенств при решении олимпиадных математических задач

Пример 1. Пусть $a+ b+ c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$.

Доказательство: по неравенству Коши-Буняковского получаем

$$1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Отсюда $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$. Что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что для любых x, y, z из множества действительных чисел, притом, что $xyz \ne 0$, выполнено неравенство

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \ge 9.$$

Доказательство:

$$3 = (1+1+1) = x \cdot \frac{1}{x} + y \cdot \frac{1}{y} + z \cdot \frac{1}{z} \le \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}, \text{ т.е.}$$

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \ge 9$$

Пример 3. Пусть $a, b, c > 0$. Доказать, что имеет место следующее неравенство

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c\,.$$

Доказательство: по неравенству Коши получаем

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}bc}=3a,$$

$$\frac{b^3}{ac}+a+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ac}ac}=3b,$$

$$\frac{c^3}{ab}+b+a\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}ab}=3c\,.$$

Складываем получившиеся неравенства, получаем

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{bc}+2(a+b+c)\geq 3(a+b+c)\,.$$

Пример 4. Доказать, что для любых *a, b, c* > 0 выполнено неравенство $a+b+c\leq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$.

Доказательство:

$$a+b+c=\sqrt{b}\cdot\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{b}{\sqrt{c}}+\sqrt{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{a}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^2},$$

$$a+b+c\leq\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}}\,,$$

$$a+b+c\leq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Пример 5. Доказать неравенство $\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta+\cos\gamma\leq 2$ [26].

Доказательство:

Используя неравенство Коши-Буняковского получаем,

$$\sin\beta\sin\gamma + 1\cdot\cos\beta + 1\cdot\cos\gamma \le \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta + 1^2}\cdot\sqrt{\sin^2\gamma + \cos^2\gamma + 1^2} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$$

Пример 6. Докажите неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \ge 14$, если $x + 2y + 3z \ge 14$ [27].

Доказательство:

$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \ge (x + 2y + 3z)^2 \ge 14^2$, откуда

$x^2 + y^2 + z^2 \ge 14$.

2.3. Разработка занятий элективного курса «Уравнения и неравенства в школьных математических олимпиадах»

Министерством образования РФ принята «Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования». В соответствии с Концепцией перед школами открылась возможность в большей степени учитывать потребности учащихся, эффективнее готовить их к будущей профессии или продолжению обучения в вузах.

В Концепции проводится следующее определение: «Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента учебного плана [24].

По своему содержанию элективные курсы могут представлять собой:

- профессиональные пробы (позволяют старшекласснику получить опыт деятельности в рамках наиболее общих профессиональных направлений в реальных и \ или модельных условиях с тем, чтобы он смог примерить на себя профессиональную и социально-профессиональную роль);
- социальные практики (позволяют старшекласснику получить опыт реальной деятельности в рамках наиболее общих профессиональных

направлений с тем, чтобы он смог примерить на себя социально-профессиональную роль);

- (пред)профессиональная подготовка (позволяют получить предпрофессиональную или профессиональную подготовку);
- пропедевтика вузовских специальных дисциплин (предоставляют старшекласснику возможность оценить степень своей готовности к обучению по данной специальности через опыт изучения специализированных дисциплин в рамках выбранного направления);
- расширение (углубление) отдельных тем обязательных предметов федерального компонента и обязательных предметов по выбору (дают возможность удовлетворить в отдельных частях запрос на такое направление изучения предмета, которое не было включено в учебный план, например, из-за малочисленности запросов);
- общеразвивающие тренинги (позволяют эффективно решать вопросы функциональной готовности учащихся к какой-либо деятельности, формировать ключевые компетентности);
- удовлетворение познавательных интересов (курсы, имеющие своей целью реализацию познавательных интересов учащегося, могут быть направлены на самые разнообразные предметы, далекие как от базового содержания общего образования, так и от социально-профессионального самоопределения) [21].

Параграф отражает программу курса «Уравнения и неравенства в школьных математических олимпиадах» для старших классов. Этот курс разработан для учащихся, которые проявляют интерес к математике.

<u>Цель курса:</u> подготовка учащихся к решению олимпиадных математических задач.

<u>Задачи курса:</u>

- повторить ранее полученные знания по темам уравнения и неравенства;

- рассмотреть основные методы решения олимпиадных заданий.

Ожидаемые результаты:

- усвоение необходимых знаний по теме «Уравнения и неравенства»;
- умения работать в группах;
- умение самостоятельно анализировать полученные результаты.

Структура курса

Курс рассчитан на 14 занятий. Включенный в программу материал предполагает повторение и изучение следующих разделов:

- рациональные уравнения;
- тригонометрические уравнения;
- показательные и логарифмические уравнения;
- неравенства.

Формы организации учебных занятий

Формы проведения занятий включают в себя лекции, практические работы, тренинги по использованию методов поиска решений, лабораторную работу в группах.

Каждая тема курса начинается с исторического экскурса. Теоретический материал излагается в форме мини лекции, с использованием презентаций. После изучения теоретического материала выполняются практические задания для его закрепления.

Проводится игра и выступление с докладами для закрепления материала, а также лабораторные работы по самостоятельному изучению.

Занятия строятся с учётом индивидуальных особенностей обучающихся, их темпа восприятия и уровня усвоения материала.

Учебно-тематический план (таблица 1)

Таблица 1

№	Тема	Количество учебных часов	Форма проведения	Образовательный продукт
1	Вводное занятие. Уравнения и неравенства в школьных олимпиадах	1	Игра	Актуализация ранее полученных знаний
2	Рациональные уравнения и методы их решений	3	Беседа. Самостоятельная работа. Практическая работа.	Решение уравнений степени больше второй
3	Тригонометрические уравнения	2	Групповая работа, работа в парах	Применение ранее полученных знаний на практике
4	Показательные и логарифмические уравнения	2	Лекция. Лабораторная работа	Решение уравнений повышенной сложности
5	Методы решения неравенств	3	Лекция. Практикум по решение неравенств.	Доказательство и решение неравенств
6	Использование классических неравенств при решении задач	2	Доклады по теме. Практикум по решению неравенств	Доказательство неравенств
7	Заключительное занятие	1	Выступление с докладами	Систематизация знаний

Содержание программы

Тема 1. Вводное занятие

Виды уравнений, изученные в школьном курсе математики. Понятия уравнения, корень уравнения, решение уравнения и неравенства. Основные методы решения уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Тема 2. Рациональные уравнения

Понятие рациональные уравнения. Понятие целые рациональные уравнения. Основные свойства и теоремы, применимые при решении рациональных уравнений. Понятие дробно-рациональные уравнения.

Основные свойства и теоремы, применимые при решении рациональных уравнений.

Тема 3. Тригонометрические уравнения

Понятие тригонометрического уравнения. Понятие трансцендентного уравнения. Решение элементарных тригонометрических уравнений. Основные формулы тригонометрии. Использование основных тригонометрических формул при решении заданий математических олимпиад.

Тема 4. Показательные и логарифмические уравнения

Понятие показательной функции. Понятие логарифмической функции. Основные свойства показательных и логарифмических функций. Основные методы решения показательных уравнений. Основные методы решения логарифмических уравнений.

Тема 5.Методы решения неравенств

Понятие неравенства. Основные свойства неравенств, изучаемые в курсе алгебры средней школы. Основные методы решения неравенств.

Тема 6. Использование классических неравенств при решении задач

Основные свойства неравенств, изучаемые в курсе алгебры средней школы. Доказательство простейших неравенств. Среднее геометрическое. Среднее арифметическое. Среднее квадратичное. Соотношения между указанными средними, обоснование этих соотношений. Использование рассмотренных соотношений при доказательстве неравенств.

Тема 7. Заключительное занятие

Выступление детей с докладами по различным темам.

Для большего понимания, как устроен наш элективный курс, рассмотрим материалы уроков разного типа, а именно лекцию по целым рациональным уравнениям, лабораторную работу по тригонометрическим уравнениям.

Разработка занятия по теме «Рациональные уравнения»

Занятие проходит в форме беседы, учащиеся осуществляют поиск решения задания вместе с учителем. Вначале занятия вместе с учителем учащиеся вспоминают основные определения, которые необходимы.

Тема: Целые рациональные уравнения

Цель: Вспомнить понятия связанные с целыми рациональными уравнениями, находить решения уравнений любой степени.

<u>Задачи урока</u>

Обучающая:

- вспомнить основные определения по теме;
- развитие умения работы с разным уровнем сложности уравнениями.

Развивающая:

- развитие письменной и устной речи учащихся;
- расширение кругозора учащихся;
- развитие умения анализировать и систематизировать полученные данные.

Воспитывающая:

- воспитание любви к предмету, трудолюбие;
- воспитание внимательности, аккуратности и усидчивости.

В вопросно-ответной форме учитель и учащиеся вспоминают базовые определения по теме.

<u>Определение.</u> Рациональные уравнения – это уравнения, обе части которого являются рациональными выражениями.

<u>Определение.</u> Рациональное уравнение называется целым, если и левая, и правая его части являются целыми рациональными выражениями.

Основной подход к решению целых уравнений – это сведение к равносильным алгебраическим уравнениям. Равносильные преобразования заключаются в следующем: выражение из правой части переносится в левую с противоположным знаком, чтобы получить в правой части ноль, после чего приводят многочлен к стандартному виду.

Полученное алгебраическое уравнение равносильно исходному целому уравнению.

Основным методом решения целых рациональных уравнений является метод разложения на множители.

Уравнение $f(x)\cdot g(x) = 0$ определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $2k^3 – 3k^2 – 8k + 12 =0$ [20].

Решение.

Разложим многочлен, стоящий в левой части, на множители методом группировки:

$$2k^3 – 3k^2 – 8k + 12 = k^2(2k-3)- 4(2k – 3) = (2k– 3)(k^2 -4).$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $(2k–3)(k^2-4) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений $2k – 3 =0$ и $k^2 – 4 =0$. Решая их, получим: $k_1= 1,5$; $k_2 = 2$;$k_3 = - 2$.

Ответ: -2; 1,5; 2.

Перед тем как разбирать пример 2, необходимо рассказать учащимся про схему Горнера, как она реализуется при решении уравнений.

Пример 2. Решить уравнение $t^4 – 4t^3 – 13t^2 + 28t +12 =0$ [32].

Решение.

Делителями свободного члена являются числа:

- 1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12.

По схеме Горнера проверим, нет ли среди этих чисел корней данного уравнения (таблица 2).

Таблица 2

α	1	-4	-13	28	12	Вывод
1	1	-3	-16	12	24≠0	t =1 – не корень
2	1	-2	- 17	-6	0	t =2 – корень
3	1	-1	-16	-20	≠0	t =3 – не корень
-3	1	-5	-2	0		t =-3 – корень

Данное уравнение представим в виде: $(t-1)(t+3)(t^2-5t-2)=0$.

Отсюда следует, что $t_1=2$, $t_2=-3$, $t_3=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $t_4=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $t_1=2$, $t_2=-3$, $t_3=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$, $t_4=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Введение новой переменной.

Метод введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную $y=q(x)$ и выражают $f(x)$ через y, получая новое уравнение, решив которое, возвращаются к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение $(3c+2)^4-13(3c+2)^2+36=0$ [20].

Решение.

Полагая $y=(3c+2)^2$, получим уравнение $y^2-13y+36=0$

Находим его корни: $y_1=4$, $y_2=9$, и решаем уравнения

$$(3c+2)^2=4 \text{ и } (3c+2)^2=9$$

получаем $c_1=0, c_2=-\frac{4}{3}, c_3=\frac{1}{3}, c_4=-\frac{5}{3}.$

Ответ: $c_1=0, c_2=-\frac{4}{3}, c_3=\frac{1}{3}, c_4=-\frac{5}{3}.$

Пример 4. Решить уравнение $(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)=24$ [31].

Решение.

Раскроем скобки, группируя первый множитель с последним, а второй с третьим: $(t^2+5t+4)(t^2+5t+6)=24$.

Полагая $t^2 + 5t = y$, получим уравнение второй степени $(y+4)(y+96) = 24$, решая которое, получим уравнение $y^2 + 10y = 0$, откуда $y = 0$ или $y = -10$. Возвращаясь к исходной переменной t, получим два уравнения:

$$t^2 + 5t = 0 \text{ и } t^2 + 5t = -10.$$

Первое уравнение имеет корни 0 и -5, второе – действительных корней не имеет, так как его дискриминант $D < 0$.

Ответ: -5; 0.

В конце занятия подводятся итоги. В форме самостоятельной работы. Учащимся предлагается уравнение, необходимо решить его.

Задание. Найдите чему равно число, которое должно стоять на месте многоточия $(x^2 + \ldots)(x+1) = (x^4 + 1)(x+2)$, если известно, что один из корней данного уравнения равен [13].

Ответ: 2.

Разработка занятия по теме «Тригонометрические уравнения»

Занятие проходит в форме групповой работы, дети выполняют задания самостоятельно. Вначале занятия вместе с учителем учащиеся вспоминают основные определения, которые необходимы.

Тема: Тригонометрические уравнения

Цель: Вспомнить понятия связанные с тригонометрическими уравнениями, рассмотренные ранее на уроках математики.

<u>Задачи урока</u>

Обучающая:

- вспомнить и закрепить основные тригонометрические формулы;
- развитие умения работы с разным уровнем сложности уравнениями.

Развивающая:

- развитие письменной и устной речи учащихся;

- расширение кругозора учащихся;
- развитие умения анализировать и систематизировать полученные данные.

Воспитывающая:

- воспитание любви к предмету, трудолюбие;
- воспитание внимательности, аккуратности и усидчивости.

Учащиеся сразу делятся на группы, в которых они будут работать.

Вспоминают вместе с учителем определения, которые необходимы при решении тригонометрических уравнений.

Определение. Тригонометрическим уравнением называется равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрической функции.

Например: $\cos 3x = \sin x$, $tg\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - tg\left(\frac{3\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

Уравнения $\sin x = \frac{1}{2}x, tg2x = x$ являются трансцендентными уравнениями, а не тригонометрическими.

Определение. Решить тригонометрическое уравнение – значит найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению [7].

Определение. Уравнения $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$; $a\sin x + b\cos x = 0$; $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + x\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ называют однородными относительно sin*x* и cos*x* [26].

Для дальнейшей работы с различными тригонометрическими уравнениями необходимо проверить насколько хорошо учащиеся знают основные формулы тригонометрии, которые необходимы при решении уравнений. Учащиеся в группах должны записать как можно больше тригонометрических формул, которые они помнят и знают. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Формулы сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму.

После записи основных формул, которые необходимы при решении уравнений, учащиеся обмениваются результатами своей групповой работы.

На следующем этапе занятия, группам выдаются одинаковые карточки с заданиями, которые необходимо решить разными способами или найти хотя бы один способ решения.

Пример 1. Решите уравнение $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos8\alpha=\frac{1}{4}\sin12\alpha$ [13].

Решение.

Воспользуемся формулой для синуса двойного угла и получим уравнение:

$$\frac{1}{4}\sin4\alpha\cdot\cos8\alpha=\frac{1}{4}\sin12\alpha,$$

$$\sin4\alpha\cdot\cos8\alpha=\sin12\alpha,$$

$$\frac{1}{2}(\sin(-4\alpha)+\sin12\alpha)=\sin12\alpha,$$

$$\sin12\alpha+\sin4\alpha=0,$$

$$2\sin8\alpha\cos4\alpha=0.$$

Тогда $\sin8\alpha=0$ или $\cos4\alpha=0$. Решениями этих уравнений будут $\alpha=\frac{\pi m}{8}$ или $\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, где $m,n\in Z$.

Ответ: $\alpha=\frac{\pi m}{8},m\in Z.$

Пример 2. Решите уравнение $\sin9z+\frac{1}{2}\sin\left(3z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3z+\pi).$

Решение.

$$\sin9z+\left(\frac{1}{2}\sin3z+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin3z\right)=0,$$

$$\sin9z+\cos\left(\frac{\pi}{3}-3z\right)=0,$$

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{12}-6z\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-3z\right)=0,$$

$$z_1 = -\frac{\pi}{72} - \frac{\pi m}{6}; z_2 = -\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi k}{3}, m, k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{72} - \frac{\pi m}{6}; -\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi k}{3}, m, k \in Z.$

Пример 3. Решите уравнение $tg^2\varphi = \frac{1-\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$\frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varphi)} - \frac{1-\cos\varphi}{1-\sin\varphi} = 0,$$

$$1-\cos\varphi = 0 \text{ или } \cos\varphi - \sin\varphi = 0.$$

Решением данной совокупности уравнений является:

$$\varphi_1 = 2\pi m, \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n, m \in Z.$$

Ответ: $\varphi_1 = 2\pi m, \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n, m \in Z.$

Пример 4. Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x.$$

Решение.

$$\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x,$$

$$\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - (1 + \cos 2x) = 0,$$

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 2\cos^2 x = 0,$$

$$2\cos x(\sin x - \cos x) - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0,$$

$$\sin x - \cos x = 0 \text{ или } 2\cos x - \sqrt{3} = 0,$$

$$tgx = 1 \text{ или } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ или $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in Z.$

Пример 5. Решите уравнение $\sin^2 x\sin 2x+\cos^2 x\cos 2x=\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sin^2 x\sin 2x+\cos^2 x\cos 2x=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}\cos 2x=\frac{1}{2},$$

$$\sin 2x-\cos 2x si 2x+\cos 2x+\cos^2 2x=1,$$

$$(\sin 2x+\cos 2x)-\sin 2x(\sin 2x+\cos 2x)=0,$$

$$(\sin 2x+\cos 2x)(1-\sin 2x)=0,$$

$$\sin 2x+\cos 2x=0 \text{ или } 1-\sin 2x=0,$$

$$tg 2x=-1 \text{ или } \sin 2x=1$$

$$x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z \text{ или } x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Итоги подводятся в форме представления своего решения другим группам. Также разрешаются вопросы, в чем произошли затруднения на этапе решения тригонометрического уравнения.

Разработка занятия по теме «Использование классических неравенств при решении задач»

На занятии учащиеся представляют сообщения о выбранном ранее неравенстве (неравенство Йенсена, Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского), дают историческую справку и приводят примеры, при решении которых используются известные неравенства.

Тема: Неравенства.

Цель: Научиться решать задания, применяя известные неравенства.

Задачи урока

Обучающая:

- познакомиться с основными неравенствами, которые используются при решении олимпиадных задач;
- развитие умения работы с разным уровнем сложности неравенств.

Развивающая:

- развитие письменной и устной речи учащихся;
- расширение кругозора учащихся;
- развитие умения анализировать и систематизировать полученные данные.

Воспитывающая:

- воспитание любви к предмету, трудолюбие;
- воспитание внимательности, аккуратности и усидчивости.

После того, как учащиеся представили доклады, им предлагается доказать неравенства, причем начинать с тех неравенств, которые, на их взгляд, более простые.

Задание. Докажите неравенства.

Пример 1. $x^2 + y^2 \geq 2xy$;

Доказательство.

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0.$$

Пример 2. $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, где $c, d \geq 0$;

Доказательство.

$$c + d - 2\sqrt{cd} = \left(\sqrt{c} - \sqrt{d}\right)^2 \geq 0.$$

Пример 3. $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \ge \dfrac{x+y}{2}$.

Доказательство.

Из неравенства $2xy \le x^2+y^2$ получим эквивалентное ему неравенство $x^2+y^2+2xy \le 2x^2+2y^2 \Rightarrow \dfrac{(x+y)^2}{4} \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ или $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ отсюда следует, что $\dfrac{x+y}{2} \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

Пример 4. $\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

Доказательство следует из доказательства третьего неравенства.

Пример 5. $x^2+y^2 > z^2+(x+y-z)^2$, где $x > z$, $y < z$.

Доказательство.

Оценим разность левой и правой частей неравенства:

$$x^2+y^2-z^2-(x+y-z)^2 = (x^2-z^2)-((x+y-z)^2-y^2) =$$

$$=(x-z)(x+z)-(x-z)(x+2y-z) = 2(x-z)(z-y) > 0,$$ согласно условию $x > z$, $y < z$.

Пример 6. $(x+y)(x+z)(y+z) \ge 8xyz$, где $x, y, z > 0$.

Доказательство.

$\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, $\dfrac{x+z}{2} \ge \sqrt{xz}$, $\dfrac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz}$, перемножив почленно, получим

$$\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{8} \ge xyz.$$

Пример 7. $a^8+b^8 \ge \dfrac{1}{128}$, если $a+b=1$.

Доказательство.

$$\frac{a^8+b^8}{2} \ge \left(\frac{a^4+b^4}{2}\right)^2 \ge \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^4 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^8 = \frac{1}{128}.$$

Пример 8. $x^4+y^4+z^4 \ge xyz(x+y+z)$;

Доказательство.

$$x^4+y^4\ge 2x^2y^2,\ y^4+z^4\ge 2y^2z^2,\ z^4+x^4\ge 2z^2x^2$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$x^4+y^4+z^4\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

Теперь

$$x^2y^2+y^2z^2\ge 2xy^2z,\ y^2z^2+z^2x^2\ge 2xyz^2,\ x^2z^2+x^2y^2\ge 2x^2yz$$

Складываем неравенства, получим

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)$$

$$x^4+y^4+z^4\ge xyz(x+y+z).$$

Пример 9. $2(x^4+y^4)+17>16xy.$

Доказательство.

$$x^4+y^4\ge 2x^2y^2$$

$$2(x^2+y^2)+17\ge 4x^2y^2+17>4(x^2y^2+4)\ge 16xy.$$

Пример 10. $\cos^3 x\sin x\le\dfrac{3\sqrt{3}}{16}.$

Доказательство.

$$\cos^6 x\sin^2 x=27\frac{\cos^2 x}{3}\cdot\frac{\cos^2 x}{3}\cdot\frac{\cos^2 x}{3}(1-\cos^2 x)\le$$

$$\le 27\left(\frac{\frac{\cos^2 x}{3}+\frac{\cos^2 x}{3}+\frac{\cos^2 x}{3}+1-\cos^2 x}{4}\right)^4=\frac{27}{4^4},\text{ откуда}$$

$\left|\cos^3 x\sin x\right|\le\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, следовательно, $\cos^3 x\sin x\le\dfrac{3\sqrt{3}}{16}.$

Темы докладов для заключительного занятия

Учащимся вначале курса предлагаются следующий перечень тем, над которыми они будут работать в течение всех занятий. В конце курса на заключительном занятии учащиеся представят свои доклады.

1. Алгоритм решения уравнений выше третьей степени.
2. Составление памятки правил и алгоритмов решения уравнений в математических олимпиадах.
3. Способы решения кубических уравнений.
4. Применение теоремы Виета для уравнений высших степеней.
5. Алгоритм решения уравнений с параметрами.
6. Решение одного уравнения различными способами.
7. Решение систем уравнений методом Гаусса.
8. Решением систем уравнений методом Крамера.

По итогам второй главы можно сделать следующие выводы. Раскрыты теоретические вопросы, связанные с понятиями и методами решений уравнений и неравенств. Составлен учебный план курса «Уравнения и неравенства в математических олимпиадах» и приведены примеры разработок занятий для реализации курса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам исследования сделаны следующие выводы. Проведен анализ литературы по данной теме исследования, который составляет 33 наименования. Наиболее подробно представлена тема в книгах Фаркова А.В. Математические олимпиады в школе, 5-11 классы, Петракова И.С. Математические олимпиады школьников. На основании выбранной учебной и методической литературы были выделены основные моменты, связанные с организацией и проведением школьных математических олимпиад. Подробно раскрыты цели и структура олимпиад по математике в школе. Рассмотрены критерии оценивания. Сделан вывод, что математические олимпиады являются достаточно популярной формой организацией внеурочной работы в школе.

Раскрыто содержание теоретических вопросов, связанных с понятиями и методами решений уравнений и неравенств, также рассмотрены основные классические неравенства, которые используются при решении задач математических олимпиад. Дано понятие и составлен учебный план элективного курса «Уравнения и неравенства в математических олимпиадах». Для реализации составленного курса приведены разработки занятий по трем темам и приведены темы докладов, над которыми учащиеся будут работать в течение всего курса.

Материалы исследования были частично апробированы на факультетской математической олимпиаде, проведенной в рамках Осенней студенческой научной сессии на математическом факультете Пермского гуманитарно-педагогического университета. Студентам первого курса предлагалось решить уравнение графическим методом. Результаты проверки выполненных участниками олимпиады работ показали, что не все студенты на должном уровне владеют вышеуказанным методом. Поэтому, для студентов-первокурсников было проведено занятие на тему «Функционально-графический метод решения уравнений и неравенств».

По результатам исследования имеются следующие публикации: Применение неравенств при решении олимпиадных задач // Вопросы математики, её истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2015. – Вып. 8. – С. 77-78.

О подготовке учащихся 10-х классов к решению олимпиадных математических задач // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. межрегион. науч.-практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: Ю.В. Корзнякова, И.В. Косолапова; под общ. ред. Ю.В. Корзняковой; Перм. гос. гуманит.-пед. ун-т. – Пермь, 2016. – Вып. 9. – С. 45-46.

Разработки занятий элективного курса могут быть полезны как ученикам старшей ступени обучения, так студентам и учителям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике / Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, Д.А. Терёшин. – Москва: МЦНМО, 2007. – 472 с.

2. Агаханов Н.Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – Москва: Просвещение, 2010. – 192 с.

3. Агаханов Н.Х. Школьные математические олимпиады / Н.Х. Агаханов, Д.А. Терешин, Г.М. Кузнецова. – Москва: Дрофа, 1999. – 128 с.

4. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы / Э.Н. Балаян. – Ростов на Дону: Феникс, 2013. – 317 с.

5. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства / М.И. Башмаков. – Москва: Наука, 1976. – 93 с.

6. Берколайко С.Т. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств / С.Т. Берколайко, С.Б. Каток // Научно-популярный математический журнал «Квант». – 1970. – №8. – С. 33-36.

7. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравенства / И.Т. Бородуля. – Москва: Просвещение, 1989. – 239 с.

8. Бохан К.А. Курс математического анализа. Т.1. Учебное пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / К.А. Бохан, И.А. Егорова, К.В. Лащенов. – Москва: Просвещение, 1972. – 511 с.

9. Васильев Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.

10. Васильев Н.Б. Заочные математические олимпиады / Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Работ, А.Л. Тоом. – Москва: Наука, 1986. – 176 с.

11. Варианты заданий заключительного (очного) этапа олимпиады МГТУ им. Н.Э. Баумана «Шаг в будущее» по математике для 8-10 классов 2013-2014 учебного года.

12. Гельфанд И.М. Функции и графики / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль. – Москва: МЦНМО, 2006. – 122 с.

13. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – Москва: МЦНМО, 2005.

14. Задачи математических олимпиад // Математика для школы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math4school.ru/zadachi.html. (дата обращения 02.04.2016).

15. Конюшков А. Неравенство Коши-Буняковского / А. Конюшков // Научно-популярный математический журнал «Квант». – 1987. – №18. – С. 40.

16. Коровкин П.П. Неравенства / П.П. Коровкин. – Москва: Наука, 1965.

17. Мордкович А.Г. Решаем уравнения / А.Г. Мордкович. – Москва: Школа-Пресс, 1995. – 80 с.

18. Олехник С.Н. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – Москва: Экзамен, 1998. – 192 с.

19. Олехник С.Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – Москва: Наука, 2007. – 217 с.

20. Олимпиадные задачи по математике начального уровня дляучащихся 9–11 классов. Учеб. пособие / Сост. Г.Я. Куклина. 2-е изд. исп. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. – 108 с.

21. Орлов В.А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения/ В.А. Орлов // Интернет-журнал «Эйдос», 2003.

22. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей /И. С. Петраков. – Москва: Просвещение, 1982. – 96с.

23. Приказ Минобрнауки РФ от 22.10.2007 № 285 (ред. от 11.10.2010) «Об утверждении порядка проведения олимпиад школьников».

24. Приказ Минобрнауки РФ от 18.07.2002 № 2783 «Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования».

25. Раббот Ж.К. Избранные школьные задачи / Ж.К. Раббот // Научно-популярный математический журнал «Квант». – 1984. – № 5. – С. 37.

26. Садовничая И.В. Математические олимпиады в России / И.В. Садовничая и др. – Москва: Дрофа. – 239 с.

27. Седракян Н.М. Неравенства. Методы доказательства / Н.М. Седракян, А.М. Авоян. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

28. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах / И.Х. Сивашинский. – Москва: Наука, 1967.

29. Соловьёв Ю.П. Неравенства / Ю.П. Соловьев. – Москва: МЦНМО, 2005. – 16 с.

30. Фарков А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы / А.В. Фарков. – 8-е изд., испр. и доп. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 256с.

31. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования от 17.05.2012 № 413.

32. Федоров Р.М. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Р.М. Федоров, А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи, И.В. Ященко. – Москва: МЦНМО, 2006.

33. Шрайнер А.А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области / А.А. Шрайнер. – Новосибирск, 2000. – 168 с.